แผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค32203

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

เรื่อง

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เมทริกซ์

เวกเตอร์

โดย

นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะ ชำนาญการพิเศษ

โรงเรียนสตรีศึกษา

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 27

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ **จำนวน 40 ชั่วโมง**

เรื่อง การวัดความยาวส่วนโค้งและพิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง **จำนวน 2 ชั่วโมง**

ผู้สอน นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล **โรงเรียนสตรีศึกษา**

ผลการเรียนรู้

1) เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและ นำไปใช้ในการแก้ปัญหา
2) แก้สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
3) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

1) บอกวิธีการหาความยาวส่วนโค้งและพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งได้ (K)
2) แสดงการหาความยาวส่วนโค้งและพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งได้ (P)
3) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

ถ้า $\theta > 0$ ให้วัดจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เป็นระยะ θ หน่วย หรือ วัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา θ มีค่าเป็นบวก

ถ้า $\theta < 0$ ให้วัดจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา เป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย(ระยะทางเป็นบวกเสมอ) หรือ วัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา θ เป็นลบ

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการสำรวจ ค้นหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
2) ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	

กิจกรรมการเรียนรู้

📖 **แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : นิรนัย (Deductive Method)**

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

ขั้นเตรียม

1. ครูกล่าวทักทายนักเรียน และแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ หลังจากนั้นครูถามคำถามหน้าหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ในหนังสือเรียน หน้า 2

** หมายเหตุ ครูยังไม่เฉลยคำตอบของคำถามหน้าหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 แต่จะเฉลยในคาบสุดท้ายของหน่วยการเรียนรู้ที่ 1

2. ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียน โดยให้นักเรียนศึกษาควรรู้ก่อนเรียน ในหนังสือเรียน หน้า 3 และใช้การถามตอบอีกครั้งเพื่อตรวจสอบว่านักเรียนได้ศึกษาควรรู้ก่อนเรียน โดยครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- คู่อันดับ (3, -2) อยู่ในจตุภาคใด

  (**แนวตอบ** จตุภาคที่ 2)

- กำหนดให้ $x^2 + 36 = 100$ แล้ว x มีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** x = 8)

- นักเรียนหาคำตอบมาได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** นักเรียนสามารถตอบได้อย่างหลากหลายขึ้นกับยุทธวิธีที่นักเรียนใช้ในการหาคำตอบ)

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดพื้นฐานความรู้ก่อนเรียน โดยการสแกน QR Code ในหนังสือเรียน หน้า 3

3. ครูให้นักเรียนร่วมกันตอบคำถามเพิ่มเติมเพื่อเชื่อมโยงเข้าสู่เรื่อง การวัดความยาวส่วนโค้งและพิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง ว่า สูตรการหาความยาวเส้นรอบวงของวงกลมมีสูตรว่าอะไร

(**แนวตอบ** $2\pi r$)

4. ครูวาดรูปวงกลมที่มีรัศมีหนึ่งหน่วยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) บนกระดานพร้อมระบุพิกัด (1, 0), (0, 1), (-1, 0) และ (0, -1) แล้วถามนักเรียนว่า วงกลมรูปนี้มีความยาวเส้นรอบวงเท่ากับเท่าไร โดยหาจากสูตรการหาความยาวเส้นรอบรูปของวงกลม

(แนวตอบ $2\pi(1)=2\pi$)

ขั้นสอน

ขั้นสอนหรือแสดง

1. ครูอธิบายว่า วงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อวัดระยะจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมเป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย (ระยะทางเป็นบวกเสมอ) จะมีจุดสิ้นสุดเพียง 1 จุดเท่านั้น คือ จุดปลายส่วนโค้งคู่อันดับ (x, y) ดังรูปที่ 1 ในหนังสือเรียน หน้า 4

2. ครูให้นักเรียนพิจารณารูปที่ 1 ในหนังสือเรียน หน้า 4 แล้วอธิบายกับนักเรียนว่า ถ้า $\theta > 0$ ให้วัดจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเป็นระยะ θ หน่วย หรือ วัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาแล้ว θ มีค่าเป็นบวก

3. ครูให้นักเรียนพิจารณารูปที่ 2 ในหนังสือเรียน หน้า 4 แล้วอธิบายกับนักเรียนว่าถ้า $\theta < 0$ ให้วัดจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาเป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย (ระยะทางเป็นบวกเสมอ) หรือ วัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกาแล้ว θ เป็นลบ

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นเปรียบเทียบและรวบรวม

4. ครูกล่าวว่า จากความรู้เดิมคือ ความยาวเส้นรอบวงของรูปวงกลมหนึ่งหน่วยเท่ากับ 2π

5. ครูอธิบายว่าในรูปที่ 3 ในหนังสือเรียน หน้า 5 เป็นการแสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยเมื่อวัดระยะจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมเป็นระยะ $\theta = \frac{\pi}{2}$ หรือ $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ คือ วงกลมรัศมี 1 หน่วย ถูกแบ่งเป็น 4 ส่วน เท่า ๆ กัน และวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา θ มีค่าเป็นบวก

6. ครูกล่าวว่าในทำนองเดียวกัน รูปที่ 4 ในหนังสือเรียน หน้า 5 เป็นการแสดงตำแหน่งของจุดปลาย

ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อวัดระยะจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมเป็นระยะ $\theta = \pi$ หรือ $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ ทำในทำนองเดียวกันนี้ จนถึงรูปที่ 7 จะเห็นว่าตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย วัดระยะจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมเป็นระยะ

$$\theta = 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{2}$$

คือ $|\theta| > 2\pi$ แสดงว่าวัดความยาวส่วนโค้งจากจุด (1, 0) เกิน 1 รอบ

7. ครูอธิบายว่าในรูปที่ 8 ในหนังสือเรียน หน้า 5 เป็นการแสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อวัดระยะจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมเป็นระยะ $\theta = -\frac{\pi}{2}$ คือ วงกลมรัศมี 1 หน่วย ถูกแบ่งเป็น 4 ส่วน เท่า ๆ กัน แต่วัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา θ มีค่าเป็นลบ

8. ครูกล่าวว่าในทำนองเดียวกัน รูปที่ 9 ในหนังสือเรียน หน้า 6 เป็นการแสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อวัดระยะจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมเป็นระยะ $\theta = -\pi$ และทำในทำนองเดียวกันนี้ จนถึงรูปที่ 12 จะเห็นว่าตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย วัดระยะจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมเป็นระยะ

$$\theta = (-2\pi) + (-2\pi) + (-\frac{\pi}{2})$$

$$\theta = -\frac{9\pi}{2}$$

คือ $|\theta| > 2\pi$ แสดงว่าวัดความยาวส่วนโค้งจากจุด (1, 0) เกิน 1 รอบแต่วัดในทิศตามเข็มนาฬิกา

ขั้นสรุป

ขั้นสรุป

1. ครูให้นักเรียนอ่าน “คณิตน่ารู้” ในหนังสือเรียน หน้า 6 และครูกล่าวว่า “วงกลมหนึ่งหน่วยจะมีเส้นรอบวงยาวเท่ากับ $2\pi(1) = 2\pi$ หน่วย” ซึ่งตรงกับที่หาไว้ข้างต้น

2. ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- ถ้า $\theta > 0$ ให้วัดจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเป็นระยะ θ หน่วย หรือ วัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาแล้ว θ มีค่าเป็นจำนวนใด (**แนวตอบ** เป็นบวก)

- ถ้า $\theta < 0$ ให้วัดจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาเป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย (ระยะทางเป็นบวกเสมอ) หรือ วัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา แล้ว θ มีค่าเป็นจำนวนใด

(**แนวตอบ** เป็นลบ)

ขั้นนำไปใช้

3. ครูให้นักเรียนร่วมกันตอบคำถาม “Thinking Time”

(แนวตอบข้อ 1. รูปที่ 3 $\theta = -\frac{9\pi}{2}$ รูปที่ 4 $\theta = \pi$

รูปที่ 5 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ รูปที่ 6 $\theta = 2\pi$

รูปที่ 7 $\theta = \frac{5\pi}{2}$ รูปที่ 8 $\theta = -\frac{\pi}{2}$

รูปที่ 9 $\theta = -\pi$ รูปที่ 10 $\theta = -\frac{3\pi}{2}$

รูปที่ 11 $\theta = -2\pi$ รูปที่ 12 $\theta = -\frac{9\pi}{2}$

แนวตอบข้อ 2. รูปที่ 3, 7, 10

รูปที่ 4, 9

รูปที่ 3, 8, 12

รูปที่ 6, 11

แนวตอบข้อ 3. เป็นจุดเดียวกันได้ แต่ θ ไม่เท่ากัน)

4. ครูให้นักเรียนเขียนสรุปความรู้รวบยอดเรื่อง การวัดความยาวส่วนโค้งและพิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง และตอบคำถาม “Thinking Time” ลงในสมุด

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
1. การประเมินก่อนเรียน - แบบทดสอบก่อนเรียน หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	- ตรวจแบบทดสอบก่อนเรียน	- แบบทดสอบก่อนเรียน	- ประเมินตามสภาพจริง
2. ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) วิธีการหาความยาวส่วนโค้งและพิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง	- ตรวจใบงานที่ 1.1	- ใบงานที่ 1.1	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอผลงาน	- แบบประเมินการนำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

3) ใบงานที่ 1.1 เรื่อง การหาตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย

แหล่งการเรียนรู้

1) ห้องสมุด

2) แหล่งชุมชน

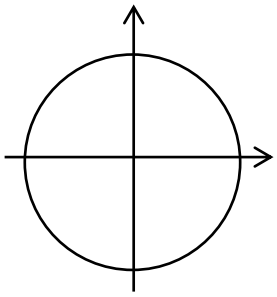
3) อินเทอร์เน็ต

ใบงานที่ 1.1

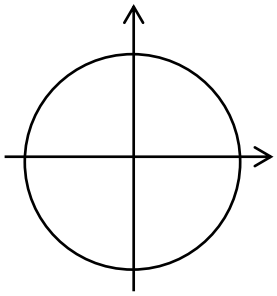
เรื่อง การหาตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย

<u>คำชี้แจง</u> : จงเขียนตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยจาก θ ที่กำหนดให้

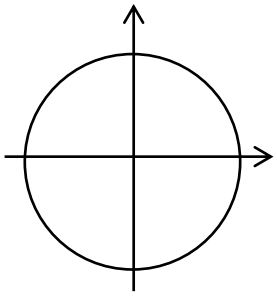
1. $\theta = \pi$



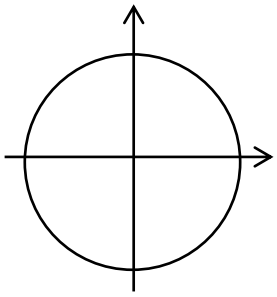
2. $\theta = \frac{3\pi}{2}$



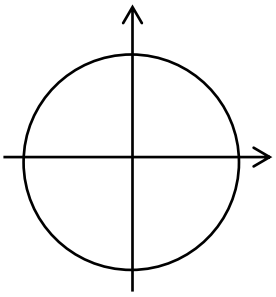
3. $\theta = 2\pi$



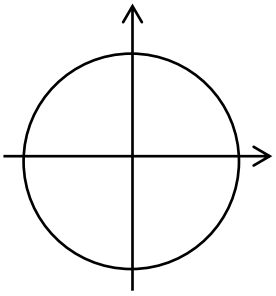
4. $\theta = \frac{7\pi}{2}$



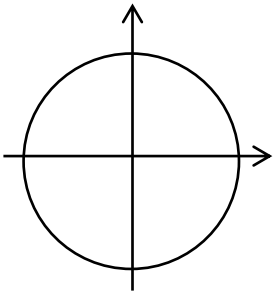
5. $\theta = -\frac{\pi}{2}$



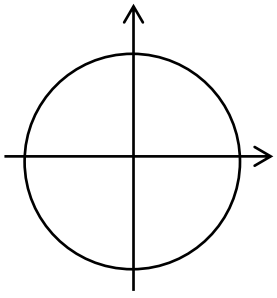
6. $\theta = -\pi$



7. $\theta = -2\pi$



8. $\theta = -\frac{7\pi}{2}$



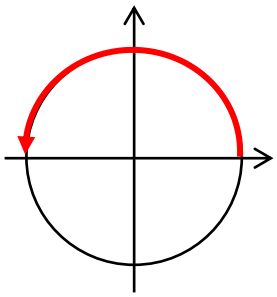
ใบงานที่ 1.1

เฉลย

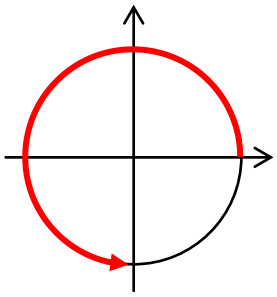
เรื่อง การหาตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย

<u>คำชี้แจง</u> จงเขียนตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยจาก θ ที่กำหนดให้

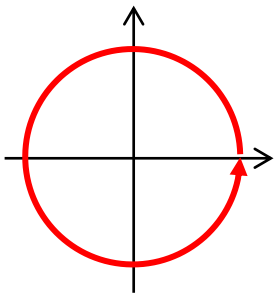
1. $\theta = \pi$



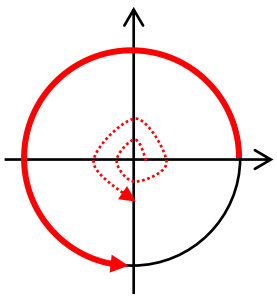
2. $\theta = \frac{3\pi}{2}$



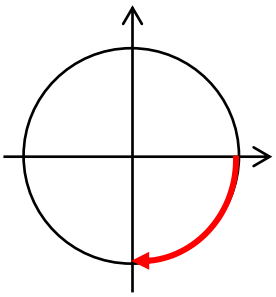
3. $\theta = 2\pi$



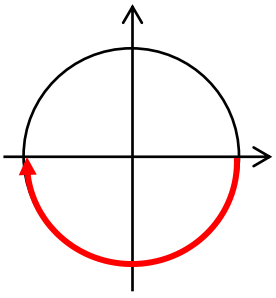
4. $\theta = \frac{7\pi}{2}$



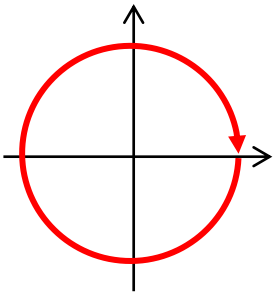
5. $\theta = -\frac{\pi}{2}$



6. $\theta = -\pi$



7. $\theta = -2\pi$



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ **จำนวน 40 ชั่วโมง**

เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ **จำนวน 5 ชั่วโมง**

ผู้สอน นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล **โรงเรียนสตรีศึกษา**

ผลการเรียนรู้

4) เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและ นำไปใช้ในการแก้ปัญหา
5) แก้สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
6) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

4) บอกวิธีการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ได้ (K)
5) แสดงการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ได้ (P)
6) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของ 0, $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$
สามารถหาได้โดยการใช้วงกลมหนึ่งหน่วย หรือการพิจารณากราฟของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์

ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

1) การหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ และ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

2) การหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\theta$ และ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\theta$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

3) การหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

$\sin\ (2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$ และ $\cos\ (2\pi - \alpha) = \cos\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

4) การหาค่า $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\theta > 2\pi$

$\theta = 2n\pi + \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $0 \leq \alpha < 2\pi$ จะได้ว่า

$$\sin\ (2n\pi + \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos\ (2n\pi + \alpha) = \cos\alpha$$

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการสำรวจ ค้นหา 2) ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้

📖 **แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : อุปนัย (Inductive Method)**

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

ขั้นเตรียม

ทบทวนความรู้เดิมเรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ และวงกลมหนึ่งหน่วย ให้กับนักเรียน โดยการใช้คำถาม ดังนี้

- อัตราส่วนตรีโกณมิติ หมายถึงอัตราส่วนใด

  (**แนวตอบ** อัตราส่วนตรีโกณมิติ หมายถึง อัตราส่วนของด้านคู่ใดคู่หนึ่งบนรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก)

- ถ้าวัดจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

เป็นระยะ θ หน่วย หรือ วัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาแล้ว θ มีค่าเป็นจำนวนใด

(**แนวตอบ** เป็นบวก)

- ถ้า $\theta < 0$ ให้วัดจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา เป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย (ระยะทางเป็นบวกเสมอ) หรือ วัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา แล้ว θ มีค่าเป็นจำนวนใด (**แนวตอบ** เป็นลบ)

ขั้นสอน

ขั้นสอนหรือแสดง

9. ครูให้นักเรียนพิจารณารูปที่ 13 ในหนังสือเรียน หน้า 7 แล้วกล่าวว่า ค่าของ θ หนึ่งค่า จะกำหนดพิกัด (x, y) ซึ่งเป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยได้เพียงพิกัดเดียว นั่นคือ θ หนึ่งค่า กำหนดค่าของ x ได้หนึ่งค่า และกำหนดค่าของ y ได้หนึ่งค่า

10. ครูให้นักเรียนศึกษาตารางในหนังสือเรียน หน้า 7 และกล่าวว่าสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง θ กับ x ได้ ดังนี้

$$\left\{(0,1),(\frac{\pi}{2},0),(\pi,-1),(\frac{3\pi}{2},0),(2\pi,1)\right\}$$

ถ้า f เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง θ กับ x ซึ่งไม่มีสองคู่อันดับใดใช้สมาชิกตัวหน้าซ้ำกัน

จะได้ว่า $f = \{(\theta, x) \in R \times R | x = f(\theta)\}$

เรียกความสัมพันธ์นี้ว่า ฟังก์ชันโคไซน์ เมื่อ $x = \text{cosine } \theta$ หรือ $x = \cos\theta$

ดังนั้น $f = \{(\theta, x) \in R \times R | x = \cos\theta\}$

11. ครูกล่าวต่อไปอีกว่าจากตารางในหนังสือเรียน หน้า 7 จะเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง θ กับ y ได้ ดังนี้

$$\left\{(0,0),(\frac{\pi}{2},1),(\pi,0),(\frac{3\pi}{2},-1),(2\pi,0)\right\}$$

ถ้า g เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง θ กับ y ซึ่งไม่มีสองคู่อันดับใดใช้สมาชิกตัวหน้าซ้ำ

จะได้ว่า $g = \{(\theta, y) \in R \times R | x = g(\theta)\}$

เรียกความสัมพันธ์นี้ว่า ฟังก์ชันไซน์ เมื่อ $y = \text{sine } \theta$ หรือ $y = \sin\theta$

ดังนั้น $g = \{(\theta, y) \in R \times R | y = \sin\theta\}$

ชั่วโมงที่ 2

1. ครูให้นักเรียนดูรูปที่ 14 ในหนังสือเรียน หน้า 8 จากนั้นครูกล่าวว่า ครูกล่าวว่าจากรูปที่ 14 จะเห็นว่าจุดปลายส่วนโค้งมีพิกัด (x, y) จะเขียนแทนด้วย $(\cos\theta, \sin\theta)$

2. ครูและนักเรียนร่วมกันศึกษาตัวอย่างที่ 1 ในหนังสือเรียน หน้า 8

ข้อ 1. $\theta = \pi$ เขียนในรูป $(\cos\theta, \sin\theta)$ ได้เป็น $(\cos\pi, \sin\pi)$

ข้อ 2. $\theta = \frac{\pi}{2}$ เขียนในรูป $(\cos\theta, \sin\theta)$ ได้เป็น $(\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2})$

ข้อ 3. $\theta = -2\pi$ เขียนในรูป $(\cos\theta, \sin\theta)$ ได้เป็น $(\cos(-2\pi), \sin(-2\pi))$

ข้อ 4. $\theta = -\frac{3\pi}{2}$ เขียนในรูป $(\cos\theta, \sin\theta)$ ได้เป็น $(\cos(-\frac{3\pi}{2}), \sin(-\frac{3\pi}{2}))$

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 8 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

3. ครูและนักเรียนร่วมกันศึกษาตัวอย่างที่ 2 ในหนังสือเรียน หน้า 9 และกล่าวว่านักเรียนจะเห็นว่าจากความสัมพันธ์ $x = \cos\theta$ และ $y = \sin\theta$ จะได้ว่า ที่ θ เท่ากับค่าใด ๆ นั่นคือ จุดปลายส่วนโค้งจะกำหนดพิกัด (x, y) ซึ่งเป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยได้เพียงพิกัดเดียว จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- ข้อ 1) $\sin 0$ มีค่าเท่าใด พิจารณาค่า x หรือ y ที่ θ เท่าใด
  (**แนวตอบ** $\sin 0 = 0$ นั่นคือ พิจารณาค่าของ y ที่ $\theta = 0$)
- ข้อ 2) $\cos\frac{\pi}{2}$ มีค่าเท่าใด พิจารณาค่า x หรือ y ที่ θ เท่าใด
  (**แนวตอบ** $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ นั่นคือ พิจารณาค่าของ x ที่ $\theta = \frac{\pi}{2}$)
- ข้อ 3) $\sin\frac{3\pi}{2}$ มีค่าเท่าใด พิจารณาค่า x หรือ y ที่ θ เท่าใด
  (**แนวตอบ** $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$ นั่นคือ พิจารณาค่าของ y ที่ $\theta = \frac{3\pi}{2}$)
- ข้อ 4) $\cos 2\pi$ มีค่าเท่าใด พิจารณาค่า x หรือ y ที่ θ เท่าใด
  (**แนวตอบ** $\cos 2\pi = 1$ นั่นคือ พิจารณาค่าของ x ที่ $\theta = 2\pi$)
- ข้อ 5) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ มีค่าเท่าใด พิจารณาค่า x หรือ y ที่ θ เท่าใด
  (**แนวตอบ** $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ นั่นคือ พิจารณาค่าของ y ที่ $\theta = -\frac{\pi}{2}$)
- ข้อ 6) $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ มีค่าเท่าใด พิจารณาค่า x หรือ y ที่ θ เท่าใด
  (**แนวตอบ** $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ นั่นคือ พิจารณาค่าของ x ที่ $\theta = -\frac{3\pi}{2}$)

- ข้อ 7) $\sin(-\pi)$ มีค่าเท่าใด พิจารณาค่า x หรือ y ที่ θ เท่าใด

  (**แนวตอบ** $\sin(-\pi) = 0$ นั่นคือ พิจารณาค่าของ y ที่ $\theta = -\pi$)

- ข้อ 8) $\cos(-2\pi)$ มีค่าเท่าใด พิจารณาค่า x หรือ y ที่ θ เท่าใด

  (**แนวตอบ** $\cos(-2\pi) = 0$ นั่นคือ พิจารณาค่าของ x ที่ $\theta = -2\pi$)

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 9 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

ข้อสังเกต จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วยจะได้ว่า

$P(n\pi) = (1, 0)$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

$P(n\pi) = (-1, 0)$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

4. ครูอธิบายการหาค่าของ $\sin\frac{\pi}{4}$ และ $\cos\frac{\pi}{4}$

จากรูปที่ 16 ในหนังสือเรียน หน้า 10 จะเห็นว่า จุด $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง AB

เนื่องจาก ส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย

แสดงว่า ส่วนโค้ง AP ยาวเท่ากับส่วนโค้ง PB ซึ่งยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย

จะได้ว่า คอร์ด AP ยาวเท่ากับคอร์ด PB

ดังนั้น $$AP = PB$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$$

$$x = y$$

จาก $x^2 + y^2 = 1$ (สมการวงกลมของวงกลมหนึ่งหน่วย)

จะได้ $$2x^2 = 1$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

เนื่องจาก (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 1 จะได้ว่า $x > 0$ และ $y > 0$

ดังนั้น $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

นั่นคือ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย คือ จุด $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

ทำให้ได้ว่า $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

และจากรูปที่ 17 ในหนังสือเรียน หน้า 10 สามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริง $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \ldots, \frac{(2n+1)\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4} \ldots, -\frac{(2n+1)\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

5. ครูและนักเรียนร่วมกันศึกษาตัวอย่างที่ 3 ในหนังสือเรียน หน้า 11 ซึ่งทำในทำนองเดียวกันกับคำอธิบายก่อนหน้านี้และเปิดโอกาสให้นักเรียนสอบถามในส่วนที่ไม่เข้าใจ

ข้อควรระวัง จากระบบพิกัดฉาก จะได้ว่า

ถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 1 แล้ว $x > 0$ และ $y > 0 \rightarrow (+, +)$

ถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 2 แล้ว $x < 0$ และ $y > 0 \rightarrow (-, +)$

ถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 3 แล้ว $x < 0$ และ $y < 0 \rightarrow (-, -)$

ถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 4 แล้ว $x > 0$ และ $y < 0 \rightarrow (+, -)$

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 12 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

6. ครูอธิบายรูปที่ 18 ในหนังสือเรียน หน้า 12 ซึ่งทำในทำนองเดียวกันกับการหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}$ และ $\cos \frac{\pi}{4}$ แต่เป็นการหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{6}$ และ $\cos \frac{\pi}{6}$

7. ครูและนักเรียนร่วมกันดูตัวอย่างที่ 4 ในหนังสือเรียน หน้า 13 ซึ่งทำในทำนองเดียวกันกับคำอธิบายก่อนหน้านี้และเปิดโอกาสให้นักเรียนสอบถามในส่วนที่ไม่เข้าใจ

8. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 14 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

9. ครูอธิบายรูปที่ 20 ในหนังสือเรียน หน้า 14 ซึ่งทำในทำนองเดียวกันกับการหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}$ และ $\cos \frac{\pi}{4}$ แต่เป็นการหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}$ และ $\cos \frac{\pi}{3}$

10. ครูและนักเรียนร่วมกันศึกษาตัวอย่างที่ 5 ในหนังสือเรียน หน้า 15 ซึ่งทำในทำนองเดียวกันกับคำอธิบายก่อนหน้านี้และเปิดโอกาสให้นักเรียนสอบถามในส่วนที่ไม่เข้าใจ หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 16 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

11. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 6 ในหนังสือเรียน หน้า 16 ซึ่งแตกต่างจากการหาค่า $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ จากเดิมที่กำหนดค่า θ แล้วให้หาความยาวส่วนโค้ง แต่ในตัวอย่างนี้จะให้ค่าของความยาวส่วนโค้งมาแล้วให้หาค่า θ ที่สอดคล้องกับฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ที่กำหนด

ครูอธิบายว่าจากตัวอย่างที่ 6 ข้อ 1) $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ เมื่อ $-2\pi \leq \theta \leq 0$

จะได้ว่า จุด (x, y) ที่เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีค่า $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

เมื่อ วัดจากจุด $(1, 0)$ จะมีความยาวเป็น $\left|-\frac{\pi}{4}\right|$ และ $\left|-\frac{3\pi}{4}\right|$

ดังนั้น θ ที่สอดคล้องกับ $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ เมื่อ $-2\pi \leq \theta \leq 0$ คือ $-\frac{\pi}{4}$ และ $-\frac{3\pi}{4}$

12. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 6 ข้อ 2) และครูถามคำถาม “จาก $0 \leq \theta \leq 4\pi$ หมายความว่าอะไร”

(**แนวตอบ** หมายความว่า วัดจากจุด $(1,0)$ ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยเป็นระยะ 4π หน่วย หรือ 2 รอบของวงกลมหนึ่งหน่วย)

จึงทำให้ข้อ 2) มี θ ที่สอดคล้องกับ $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq 4\pi$ คือ $\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$ และ $\frac{23\pi}{6}$

13. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 17 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

ชั่วโมงที่ 3

14. ครูกล่าวว่าจากเดิมที่นักเรียนได้ศึกษาการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ไปแล้ว ในหัวข้อนี้นักเรียนจะได้ศึกษาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ โดยใช้ความรู้เดิมและการสะท้อน ซึ่งมีแกน x หรือแกน y เป็นเส้นสะท้อน

15. ครูให้นักเรียนพิจารณารูปที่ 22 ในหนังสือเรียน หน้า 17 พิจารณา $\theta > 0$ และ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย ให้จุด $(x, -y)$ เป็นภาพสะท้อนจากจุด (x, y) โดยมีแกน x เป็นเส้นสะท้อน จึงได้ว่าจุด $(x, -y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ $|-\theta|$ หน่วย

จากจุด $(x, y) = (\cos\theta,\ \sin\theta)$ และ $(x, -y) = (\cos(-\theta),\ \sin(-\theta))$

จะได้ว่า $x = \cos\theta\,, y = \sin\theta$ และ $x = \cos(-\theta)\,, -y = \sin(-\theta)$

จึงสรุปได้ว่า $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

ครูถามคำถาม “ที่จุด (x, y)อยู่ในจตุภาคที่เท่าไรและที่จุด $(x, -y)$ อยู่ในจตุภาคที่เท่าไร”

(**แนวตอบ** ที่จุด (x, y)อยู่ในจตุภาคที่ 1 และที่จุด $(x, -y)$ อยู่ในจตุภาคที่ 4)

ซึ่งถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 1 แล้ว $x > 0$ และ $y > 0 \rightarrow (+, +)$

และถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 4 แล้ว $x > 0$ และ $y < 0 \rightarrow (+, -)$

16. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 7 ในหนังสือเรียน หน้า 18 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ มีค่าเท่าใด

  (แนวตอบ $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$)
- $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ มีค่าเท่าใด

  (แนวตอบ $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 18 เมื่อเสร็จแลแล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

ชั่วโมงที่ 4

17. ครูอธิบายรูปที่ 23 จากรูปที่ 23 กำหนด $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ และจุด $P'(-x,\ y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1,\ 0)$ เป็นระยะ θ หน่วย

ให้ $\alpha = \pi - \theta$ จะได้ว่า $0 < \alpha < \pi$

เนื่องจาก ส่วนโค้ง AP' ยาว θ หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง $P'B$ ยาว α หน่วย

ให้จุด $P(x,\ y)$ เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนจุด $P'(-x,\ y)$ โดยมีแกน y เป็นเส้นสะท้อนจากส่วนโค้ง $P'B$ ยาว α หน่วย จะได้ว่า ส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย

จะได้ว่า $x = \cos\alpha$ และ $y = \sin\alpha$

แต่ $-x = \cos\theta = \cos(\pi - \alpha)$ และ $y = \sin\theta = \sin(\pi - \alpha)$

ครูถามคำถาม “จุด $P'(-x,\ y)$ อยู่ในจตุภาคที่เท่าไร”

(แนวตอบ จตุภาคที่ 2)

จึงสรุปได้ว่า $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ และ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

18. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 8 ในหนังสือเรียน หน้า 19 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง และครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\sin\frac{4\pi}{5}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\sin\frac{4\pi}{5}$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\sin\frac{\pi}{5}$ ในจตุภาคที่ 2 จะมีค่าเท่ากับ 0.59)

- $\cos\frac{4\pi}{5}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\cos\frac{4\pi}{5}$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\sin\frac{\pi}{5}$ ในจตุภาคที่ 2 จะมีค่าเท่ากับ -0.81)

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 19 หลังจากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 19

19. ครูและนักเรียนร่วมกันศึกษารูปที่ 24 ในหนังสือเรียน หน้า 19 และครูอธิบายรูปที่ 24 จากรูปที่ 24

กำหนด $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ และจุด $P''(x,\ y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1,\ 0)$ เป็นระยะ θ หน่วย จะได้ว่า $-x = \cos\theta$ และ $-y = \sin\theta$

ให้ $\alpha = \theta - \pi$ จะได้ $\theta = \pi + \alpha$ เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

เนื่องจาก ส่วนโค้ง AB ยาว π หน่วย จะได้ว่า ส่วนโค้ง BP'' ยาว $\theta - \pi = \alpha$ หน่วย

ให้จุด $P'(-x, y)$ เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนจุด $P''(-x, y)$ โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน และจุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนจุด $P'(-x, y)$ โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน

จะได้ว่า ส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย

ดังนั้น จุด $P(x, y)$เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ α หน่วย

จะได้ว่า $x = \cos\alpha$ และ $y = \sin\alpha$

แต่จาก $-x = \cos\theta = \cos(\pi + \alpha)$ และ $-y = \sin\theta = \sin(\pi + \alpha)$

จึงสรุปได้ว่า $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\theta$ และ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\theta$

เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

20. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 9 ในหนังสือเรียน หน้า 20 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง และครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\sin\frac{6\pi}{5}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\sin\frac{6\pi}{5}$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\sin\frac{\pi}{5}$ ในจตุภาคที่ 3 จะมีค่าเท่ากับ -0.59)

- $\cos\frac{6\pi}{5}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\cos\frac{6\pi}{5}$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\sin\frac{\pi}{5}$ ในจตุภาคที่ 3 จะมีค่าเท่ากับ -0.81)

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 20 หลังจากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 20

ชั่วโมงที่ 5

21. ครูและนักเรียนร่วมกันศึกษารูปที่ 25 ในหนังสือเรียน หน้า 21 และครูอธิบายรูปที่ 25 โดยครูกล่าวว่า จากรูปที่ 25 กำหนด $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ และจุด $P'(x,-y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1,0)$ เป็นระยะ θ หน่วย จะได้ว่า $x = \cos\theta$ และ $-y = \sin\theta$

ให้ $\alpha = 2\pi - \theta$ จะได้ว่า $\theta = 2\pi - \alpha$ เมื่อ $0 < \theta < 2\pi$

เนื่องจาก เส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย

จะได้ว่า ส่วนโค้ง $P'A$ ยาว $2\pi - \theta =$

$2\pi - 2\pi + \alpha = \alpha$ หน่วย

ให้จุด $P(x,y)$ เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนจุด $P'(x,-y)$

โดยมีแกน x เป็นเส้นสะท้อน จะได้ว่า ส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย

ดังนั้น จุด $P(x,y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1,0)$เป็นระยะ α หน่วย

จะได้ว่า $x = \cos\alpha$ และ $y = \sin\alpha$

แต่จาก $x = \cos\theta = \cos(2\pi - \alpha)$ และ$-y = \sin\theta = \sin(2\pi - \alpha)$

จึงสรุปได้ว่า $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$ และ $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

22. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 10 ในหนังสือเรียน หน้า 22 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง และครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\sin\frac{9\pi}{5}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\sin\frac{9\pi}{5}$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\sin\frac{\pi}{5}$ ในจตุภาคที่ 4 จะมีค่าเท่ากับ -0.59)

- $\cos\frac{9\pi}{5}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\cos\frac{9\pi}{5}$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\sin\frac{\pi}{5}$ ในจตุภาคที่ 4 จะมีค่าเท่ากับ 0.81)

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 22 หลังจากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 22

23. ครูให้นักเรียนศึกษากรอบ “คณิตน่ารู้” ในหนังสือเรียน หน้า 22 และครูและนักเรียนร่วมกันศึกษาการหาค่า $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\theta > 2\pi$

จากรูปในหน้า 22 จาก $\theta > 2\pi$ และจุด $P(x,y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1,0)$เป็นระยะ θ หน่วย

จาก $\theta > 2\pi$ และเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย จะได้ว่า $\theta = 2n\pi + \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ α เป็นระยะของจุด $P(x,y)$ ที่วัดจากจุด $(1,0)$ เป็นระยะ θ หน่วย เมื่อ $0 \le \alpha < 2\pi$ จะเห็นว่า จุด $P(x,y)$ ที่เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1,0)$ เป็นระยะ θ หน่วยและ α หน่วย เป็นจุดเดียวกัน

ขั้นเปรียบเทียบและรวบรวม

24. ครูและนักเรียนจึงร่วมกันอภิปรายว่า ดังนั้น การหาจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1,0)$ เป็นระยะ θ หน่วย เมื่อ $\theta > 2\pi$ สามารถหาได้จากจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1,0)$ เป็นระยะ α หน่วย เมื่อ $\theta = 2n\pi + \alpha$ และ $0 \le \alpha < 2\pi$ จึงสรุปได้ว่า

$$\sin(2n\pi + \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(2n\pi + \alpha) = \cos\alpha$$

25. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 11 ในหนังสือเรียน หน้า 23 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเองและครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\sin\frac{25\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\sin\frac{25\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\sin\frac{\pi}{3}$ ในจตุภาคที่ 1 จะมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$)
- $\sin\left(-\frac{61\pi}{6}\right)$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\sin\left(-\frac{61\pi}{6}\right)$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\sin\frac{\pi}{6}$ ในจตุภาคที่ 1 และ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ จะได้ว่า $\sin\left(-\frac{61\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$)

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 23 หลังจากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 23

ขั้นสรุป

ขั้นสรุป

ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของ 0, $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ หาได้อย่างไร

(**แนวตอบ** สามารถหาได้โดยการใช้วงกลมหนึ่งหน่วย หรือการพิจารณากราฟของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์)

- ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ หาได้อย่างไร

(**แนวตอบ**

1) การหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ และ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

2) การหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\theta$ และ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\theta$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

3) การหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$ และ $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

4) การหาค่า $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\theta > 2\pi$

$\theta = 2n\pi + \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $0 \leq \alpha < 2\pi$ จะได้ว่า

$\sin(2n\pi + \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(2n\pi + \alpha) = \cos\alpha$)

ขั้นนำไปใช้

ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.2 ในหนังสือเรียน หน้า 24 เป็นการบ้าน

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้			
1) ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 1.2 - ตรวจ Exercise 1.2	- แบบฝึกทักษะ 1.2 - Exercise 1.2	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอผลงาน	- แบบประเมินการนำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

4) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

5) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แหล่งการเรียนรู้

1) ห้องสมุด
2) แหล่งชุมชน
3) อินเทอร์เน็ต

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ **จำนวน 40 ชั่วโมง**

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ **จำนวน 3 ชั่วโมง**

ผู้สอน นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล **โรงเรียนสตรีศึกษา**

ผลการเรียนรู้

7) เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและ นำไปใช้ในการแก้ปัญหา
8) แก้สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
9) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

7) บอกวิธีการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ได้ (K)
8) แสดงการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ได้ (P)
9) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

12. ฟังก์ชันแทนเจนต์ (Tangent Function)

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$

13. ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (Cotangent Function)

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$

14. ฟังก์ชันเซแคนต์ (Secant Function)

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$

15. ฟังก์ชันโคเซแคนต์ (Cosecant Function)

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$

โดยที่ $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$

และถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 1 แล้ว $x > 0$ และ $y > 0 \rightarrow (+, +)$

ถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 2 แล้ว $x < 0$ และ $y > 0 \rightarrow (-, +)$

ถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 3 แล้ว $x < 0$ และ $y < 0 \rightarrow (-, -)$

ถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 4 แล้ว $x > 0$ และ $y < 0 \rightarrow (+, -)$

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการสำรวจ ค้นหา 2) ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้

📖 **แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : นิรนัย (Deductive Method)**

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

กำหนดขอบเขตของปัญหา

5. ครูทบทวนความรู้เดิมเกี่ยวการการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ โดยถามคำถามนักเรียนดังนี้

- ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของ 0, $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ หาได้อย่างไร

(**แนวตอบ** สามารถหาได้โดยการใช้วงกลมหนึ่งหน่วย หรือการพิจารณากราฟของฟังก์ชันไซน์และ

ฟังก์ชันโคไซน์)

- ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ หาได้อย่างไร

(**แนวตอบ**

5) การหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ และ $\cos\ (\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

6) การหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\sin\ (\pi + \alpha) = -\sin\theta$ และ $\cos\ (\pi + \alpha) = -\cos\theta$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

7) การหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

$\sin\ (2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$ และ $\cos\ (2\pi - \alpha) = \cos\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

8) การหาค่า $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\theta > 2\pi$

$\theta = 2n\pi + \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $0 \leq \alpha < 2\pi$ จะได้ว่า

$$\sin\ (2n\pi + \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos\ (2n\pi + \alpha) = \cos\alpha)$$

6. ครูกล่าวต่อไปอีกว่านอกจากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์แล้วยังมี ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ซึ่งมีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ มาเชื่อมโยงให้เกิดเป็นความรู้ใหม่ ซึ่งมีบทนิยามดังต่อไปนี้

ขั้นสอน

ขั้นแสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

1. ครูอธิบายบทนิยามในหนังสือเรียน หน้า 25 ดังนี้

- ฟังก์ชันแทนเจนต์ (Tangent Function)

  บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

  เขียนแทน $\text{tangent}\theta$ ด้วย $\tan\theta$ (อ่านว่า แทนทีตา)

  ดังนั้น $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$

- ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (Cotangent Function)

  บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

  เขียนแทน $\text{cotangent}\theta$ ด้วย $\cot\theta$ (อ่านว่า คอตทีตา)

  ดังนั้น $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$

- ฟังก์ชันเซแคนต์ (Secant Function)

  บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

  เขียนแทน $\sec\theta$ ด้วย $\sec\theta$ (อ่านว่า เซคทีตา)

  ดังนั้น $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$

- ฟังก์ชันเซแคนต์ (Cosecant Function)

  บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

  เขียนแทน $\operatorname{cosec}\theta$ ด้วย $\operatorname{cosec}\theta$ (อ่านว่า โคเซคทีตา)

  ดังนั้น $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$

ชั่วโมงที่ 2

2. ครูอธิบายการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ในหนังสือเรียน หน้า 26 แยกพิจารณาจาก 4 กรณีต่อไปนี้

   กรณี $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

   เนื่องจาก $\sin\theta > 0$ และ $\cos\theta > 0$

   $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ดังนั้น $\tan\theta > 0$

   $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ ดังนั้น $\sec\theta > 0$

   $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ดังนั้น $\cot\theta > 0$

   $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ ดังนั้น $\operatorname{cosec}\theta > 0$

   สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ ที่ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกค่ามีค่าเป็นจำนวนบวก

3. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 12 ในหนังสือเรียน หน้า 26 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง และครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

   - $\tan\frac{\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

     (**แนวตอบ** $\tan\frac{\pi}{3}$ หาค่าได้จาก $\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}$ จะมีค่าเท่ากับ $\sqrt{3}$)

   - $\cot\frac{\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

     (**แนวตอบ** $\cot\frac{\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\tan\frac{\pi}{3}$ จะมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$)

- $\sec\frac{\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\sec\frac{\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\cos\frac{\pi}{3}$ จะมีค่าเท่ากับ 2)

- $\text{cosec}\frac{\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\text{cosec}\frac{\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\sin\frac{\pi}{3}$ จะมีค่าเท่ากับ $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$)

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 26 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

4. ครูอธิบายการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ กรณี 2 กรณี $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ในหนังสือเรียน หน้า 27

   เนื่องจาก $\sin\theta > 0$ และ $\cos\theta < 0$

   $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ดังนั้น $\tan\theta < 0$

   $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ ดังนั้น $\sec\theta < 0$

   $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ดังนั้น $\cot\theta < 0$

   $\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ ดังนั้น $\text{cosec}\theta > 0$

   สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ ที่ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคเซแคนต์จะเป็นจำนวนบวก ส่วนฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ จะเป็นจำนวนลบ

5. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 13 ในหนังสือเรียน หน้า 27 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเองและครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

   - $\tan\frac{2\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

     (**แนวตอบ** $\tan\frac{2\pi}{3}$ หาค่าได้จาก $\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{2\pi}{3}}$ จะมีค่าเท่ากับ $-\sqrt{3}$)

   - $\cot\frac{2\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(**แนวตอบ** $\cot\frac{2\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\tan\frac{2\pi}{3}$ จะมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$)

- $\sec\frac{2\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\sec\frac{2\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\cos\frac{2\pi}{3}$ จะมีค่าเท่ากับ –2)

- $\text{cosec}\frac{2\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\text{cosec}\frac{2\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\sin\frac{2\pi}{3}$ จะมีค่าเท่ากับ $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$)

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 27 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

6. ครูอธิบายการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ กรณี 3 กรณี $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

   เนื่องจาก $\sin\theta < 0$ และ $\cos\theta < 0$

   $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ดังนั้น $\tan\theta > 0$

   $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ ดังนั้น $\sec\theta < 0$

   $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ดังนั้น $\cot\theta > 0$

   $\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ ดังนั้น $\text{cosec}\theta < 0$

   สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ ที่ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ค่าของฟังก์ชันแทนเจนต์และฟังก์ชันโคแทนเจนต์จะเป็นจำนวนบวก ส่วนฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ จะเป็นจำนวนลบ

7. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 14 ในหนังสือเรียน หน้า 28 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเองและครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

   - $\tan\frac{4\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

     (**แนวตอบ** $\tan\frac{4\pi}{3}$ หาค่าได้จาก $\frac{\sin\frac{4\pi}{3}}{\cos\frac{4\pi}{3}}$ จะมีค่าเท่ากับ $\sqrt{3}$)

- $\cot\frac{4\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\cot\frac{4\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\tan\frac{4\pi}{3}$ จะมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$)

- $\sec\frac{4\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\sec\frac{4\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\cos\frac{4\pi}{3}$ จะมีค่าเท่ากับ –2)

- $\operatorname{cosec}\frac{4\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\operatorname{cosec}\frac{4\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\sin\frac{4\pi}{3}$ จะมีค่าเท่ากับ $-\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$)

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 28 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

8. ครูอธิบายการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ กรณี 4 กรณี $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

   เนื่องจาก $\sin\theta < 0$ และ $\cos\theta > 0$

   $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ดังนั้น $\tan\theta < 0$

   $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ ดังนั้น $\sec\theta > 0$

   $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ดังนั้น $\cot\theta < 0$

   $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ ดังนั้น $\operatorname{cosec}\theta < 0$

   สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ ที่ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ค่าของฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันเซแคนต์จะเป็นจำนวนบวก ส่วนฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ จะเป็นจำนวนลบ

9. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 15 ในหนังสือเรียน หน้า 29 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเองและครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

   - $\tan\frac{5\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(**แนวตอบ** $\tan\frac{5\pi}{3}$ หาค่าได้จาก $\frac{\sin\frac{5\pi}{3}}{\cos\frac{5\pi}{3}}$ จะมีค่าเท่ากับ $-\sqrt{3}$)

- $\cot\frac{5\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(**แนวตอบ** $\cot\frac{5\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\tan\frac{5\pi}{3}$ จะมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$)

- $\sec\frac{5\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(**แนวตอบ** $\sec\frac{5\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\cos\frac{5\pi}{3}$ จะมีค่าเท่ากับ 2)

- $\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(**แนวตอบ** $\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\sin\frac{5\pi}{3}$ จะมีค่าเท่ากับ $-\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$)

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 29 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

10. ครูอธิบายวิธีการดูตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงบางจำนวน เมื่อ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ว่าให้นักเรียนเริ่มจากฟังก์ชันในของแถวฟังก์ชันแล้วพิจารณาตามหลักและพิจารณาแถวที่เป็นขนาดของ θ ที่นักเรียนต้องการทราบ จุดที่ตัดกันของฟังก์ชันในหลักกับขนาดของ θ ในแถว จะเป็นค่าของฟังก์ชัน

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นใช้ทฤษฎี หลักการ

11. ครูให้นักเรียนจับคู่แล้วร่วมกันทำ “Thinking Time” ในหนังสือเรียน หน้า 30 เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้วครูสุ่มนักเรียน 1 คู่ออกมาเฉลยคำตอบ “Thinking Time” หน้าชั้นเรียน

(**แนวตอบ** $\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}$

$$= \frac{-\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$$

$$= \frac{\cos\theta}{-\sin\theta}$$

$$\sec(-\theta) = \frac{1}{\cos(-\theta)}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}$$

และ $\operatorname{cosec}(-\theta) = \frac{1}{\sin(-\theta)}$

$$= \frac{1}{-\sin\theta}$$

(จากการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ในหนังสือหน้า 17))

12. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 16 ในหนังสือเรียน หน้า 30 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อนและครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ หาค่าได้จาก $\frac{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ จะมีค่าเท่ากับ -1)

- $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ จะมีค่าเท่ากับ -1)

- $\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ จะมีค่าเท่ากับ $\sqrt{2}$)

- $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4}$ จะมีค่าเท่ากับ $-\sqrt{2}$)

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 31 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

13. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 17 ในหนังสือเรียน หน้า 31 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน

และครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\sin\frac{7\pi}{6}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\sin\frac{7\pi}{6}$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\sin\frac{\pi}{6}$ ในจตุภาคที่ 3 จะมีค่าเท่ากับ $-\frac{1}{2}$)
- $\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\cos\frac{\pi}{3}$ ในจตุภาคที่ 1 จะมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$)
- $\tan\frac{13\pi}{4}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\tan\frac{13\pi}{4}$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\tan\frac{\pi}{4}$ ในจตุภาคที่ 3 จะมีค่าเท่ากับ 1)
- $\cot\frac{9\pi}{4}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\cot\frac{9\pi}{4}$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\cot\frac{\pi}{4}$ ในจตุภาคที่ 1 จะมีค่าเท่ากับ 1)
- ค่าของ $\sin\frac{7\pi}{6}\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right)+\tan\frac{13\pi}{4}\cot\frac{9\pi}{4}$ มีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\sin\frac{7\pi}{6}\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right)+\tan\frac{13\pi}{4}\cot\frac{9\pi}{4}=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+(1)(1)=\frac{3}{4}$

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 31 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

14. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วให้แต่ละกลุ่มร่วมกันศึกษาแนวข้อสอบ PAT 1 ในหนังสือเรียน หน้า 32 เมื่อนักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาเสร็จ ครูสุ่มตัวแทนนักเรียนออกมาอธิบายวิธีการดำเนินการตามความเข้าใจของกลุ่มที่หน้าชั้นเรียน

ขั้นสรุป

ขั้นตรวจสอบและสรุป

ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- ในจตุภาคที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติใดมีค่าเป็นจำนวนบวก

  (**แนวตอบ** ฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกค่ามีค่าเป็นจำนวนบวก)
- ในจตุภาคที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติใดมีค่าเป็นจำนวนบวก

  (**แนวตอบ** ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคเซแคนต์จะเป็นจำนวนบวก)
- ในจตุภาคที่ 3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติใดมีค่าเป็นจำนวนบวก

(**แนวตอบ** ฟังก์ชันแทนเจนต์และฟังก์ชันโคแทนเจนต์จะเป็นจำนวนบวก)

- ในจตุภาคที่ 4 ฟังก์ชันตรีโกณมิติใดมีค่าเป็นจำนวนบวก

  (**แนวตอบ** ฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันเซแคนต์จะเป็นจำนวนบวก)

ขั้นฝึกปฏิบัติ

ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.3 ในหนังสือเรียน หน้า 33 เป็นการบ้าน

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้			
1) ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 1.3	- แบบฝึกทักษะ 1.3	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
อื่น ๆ	- ตรวจ Exercise 1.3	- Exercise 1.3	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอผลงาน	- แบบประเมินการนำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

6) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

7) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แหล่งการเรียนรู้

1) ห้องสมุด
2) แหล่งชุมชน
3) อินเทอร์เน็ต

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ **จำนวน 40 ชั่วโมง**

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม **จำนวน 3 ชั่วโมง**

ผู้สอน นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล **โรงเรียนสตรีศึกษา**

ผลการเรียนรู้

10) เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและ นำไปใช้ในการแก้ปัญหา

11) แก้สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

12) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

10) บอกวิธีการเปลี่ยนมุมจากหน่วย องศา เป็นเรเดียน และ จากเรเดียน เป็นองศา ได้ (K)

11) บอกวิธีการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ (K)

12) แสดงวิธีการเปลี่ยนมุมจากหน่วยองศาเป็นเรเดียน และจากเรเดียนเป็นองศา ได้ (P)

13) แสดงวิธีการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ (P)

14) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

1) หน่วยการวัดมุมในระบบเรเดียน

360 องศา	เท่ากับ	2π	เรเดียน	
จะได้ว่า 180 องศา	เท่ากับ	π	เรเดียน	
นั่นคือ 1 องศา	เท่ากับ	$\frac{\pi}{180}$	เรเดียน	
และ 1 เรเดียน	เท่ากับ	$\frac{360}{2\pi}$	องศา หรือ $\frac{180}{\pi}$	องศา

2) ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

$\cos$ ของจำนวนจริง θ หมายถึง $\cos$ ของมุม θ เรเดียน

$\sin$ ของจำนวนจริง θ หมายถึง $\sin$ ของมุม θ เรเดียน

3) ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\sin\theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้สนตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}$$

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการสำรวจ ค้นหา 2) ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้

📖 **แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching**

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

การใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

7. ครูกล่าวว่า จากเรื่องเดิมนักเรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับรูปวงกลมหนึ่งหน่วย โดยมีการวัดระยะจากจุด (1, 0)

ไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาและทิศทางตามเข็มนาฬิกาไปแล้วนั้น ในเรื่องนี้นักเรียนจะได้เรียนรู้การวัดมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม ที่รองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลม ซึ่งสามารถวัดขนาดของมุมที่ต้องการสร้างได้ 2 แบบ คือ การวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาและการวัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

16. ครูอธิบายรูปที่ 26 ในหนังสือหน้า 34 จะได้ว่าเมื่อวัดมุมในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ขนาดของมุมจะเป็นจำนวนบวกและเมื่อวัดมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ขนาดของมุมจะเป็นจำนวนลบ

หน่วยที่ใช้ในการวัดมุม คือ องศา (degree) เขียนแทนด้วย $(^\circ)$ ซึ่งแบ่งหน่วยย่อยเป็นลิปดา $(\,')$ และฟิลิปดา $(\,'')$ ดังนี้

$$1^\circ = 60'$$
$$1' = 60''$$

และหน่วยวัดมุมที่สำคัญอีกหน่วยหนึ่ง คือ เรเดียน (radian)

17. ครูให้นักเรียนดูรูปที่ 27 ในหนังสือเรียน หน้า 34 และอธิบาย มุม 1 เรเดียน เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม ที่รองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่มีรัศมียาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้น ซึ่งขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมี $\mathbf{r}$ หน่วย ที่ได้จากการหมุนรัศมีไปครบ 1 รอบ มีขนาด 2π เรเดียน แต่เมื่อวัดเป็นหน่วยในระบบองศา จะเท่ากับ 360 องศา

ดังนั้น 360 องศา เท่ากับ 2π เรเดียน

จะได้ว่า 180 องศา เท่ากับ π เรเดียน

นั่นคือ 1 องศา เท่ากับ $\frac{\pi}{180}$ เรเดียน

และ1 เรเดียน เท่ากับ $\frac{360}{2\pi}$ องศา หรือ $\frac{180}{\pi}$ องศา

ข้อควรระวัง การเขียนขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน จะไม่นิยมเขียนหน่วยกำกับไว้

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

18. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 18 ในหนังสือเรียน หน้า 35 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 35 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นรู้ (Knowing)

19. ครูให้นักเรียนดูรูปที่ 28 ในหนังสือเรียน หน้า 36 และกล่าวว่า เราจะเรียกมุม $\mathrm{B\hat{A}C}$ ว่ามุมที่อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน

20. ครูให้นักเรียนดูรูปที่ 29 ในหนังสือเรียน หน้า 36 จะได้ว่า $\cos$ ของจำนวนจริง θ หมายถึง $\cos$ ของมุม θ เรเดียน $\sin$ ของจำนวนจริง θ หมายถึง $\sin$ ของมุม θ เรเดียน

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

21. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 19 ในหนังสือเรียน หน้า 37 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 37 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

ขั้นรู้ (Knowing)

22. ครูอธิบายว่า ในเรื่องนี้เป็นความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ กับฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

23. ครูให้นักเรียนดูรูปที่ 30 และ 31 ในหนังสือเรียน หน้า 37 และร่วมกันสรุปว่า

$$\sin\theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}$$

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

24. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 20 ในหนังสือเรียน หน้า 39 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 39 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

25. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.4 ในหนังสือเรียน หน้า 40-41 ข้อ 1.-8. เป็นการบ้าน

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นลงมือทำ (Doing)

26. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มเป็น 5 กลุ่มศึกษาตัวอย่างที่ 21 ในหนังสือเรียน หน้า 39 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กันในกลุ่มของตนเอง จากนั้นให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 39 โดยให้กลุ่มที่ 1 หาค่า $\sin A$, กลุ่มที่ 2 หาค่า $\tan A$, กลุ่มที่ 3 หาค่า $\cos A$, กลุ่มที่ 4 หาค่า $\sec A$ และ กลุ่มที่ 5 หาค่า $\operatorname{cosec} A$ เมื่อเสร็จแล้วครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มออกมานำเสนอ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 39 โดยให้นักเรียนที่เป็นตัวแทนอธิบายวิธีการทำโดยละเอียดหน้าชั้นเรียน

27. ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำแบบฝึกทักษะ 1.4 ข้อ 9. ในหนังสือเรียน หน้า 41 เมื่อนักเรียนทุกคนทำเสร็จแล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบโดยละเอียด

ขั้นสรุป

1. ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้1.)หน่วยการวัดมุมในระบบเรเดียน
    - 360 องศา เท่ากับกี่เรเดียน

      (**แนวตอบ** 2π เรเดียน)
    - 180 องศา เท่ากับกี่เรเดียน

      (**แนวตอบ** π เรเดียน)
    - 1 องศา เท่ากับกี่เรเดียน

      (**แนวตอบ** $\frac{\pi}{180}$ เรเดียน)
    - 1 เรเดียน เท่ากับกี่องศา

      (**แนวตอบ** $\frac{360}{2\pi}$ องศา หรือ $\frac{180}{\pi}$ องศา)
2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม
    - $\cos$ ของจำนวนจริง θ หมายถึงอะไร

      (**แนวตอบ** $\cos$ ของมุม θ เรเดียน)

- $\sin$ ของจำนวนจริง θ หมายถึงอะไร

  (**แนวตอบ** $\sin$ ของมุม θ เรเดียน)

3. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
   - $\sin\theta$ เป็นความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากด้านใดต่อด้านใด

     (**แนวตอบ** $\sin\theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้สนตรงข้ามมุมฉาก}}$)
   - $\cos\theta$ เป็นความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากด้านใดต่อด้านใด

     (**แนวตอบ** $\cos\theta = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$)
   - $\tan\theta$ เป็นความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากด้านใดต่อด้านใด

     (**แนวตอบ** $\tan\theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}$)

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้			
1) ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 1.4 - ตรวจ Exercise 1.4 - ตรวจใบงานที่ 1.2	- แบบฝึกทักษะ 1.4 - Exercise 1.4 - ใบงานที่ 1.2	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอผลงาน	- แบบประเมินการนำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

8) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

9) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

10) ใบงานที่ 1.2 เรื่อง การหาค่าของ $\tan\theta, \cot\theta, \sec\theta$ และ $\operatorname{cosec}\theta$ เมื่อทราบค่าของมุม

แหล่งการเรียนรู้

1) ห้องสมุด
2) แหล่งชุมชน
3) อินเทอร์เน็ต

ใบงานที่ 1.2

เรื่อง การหาค่าของ $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ และ $\operatorname{cosec}\theta$ เมื่อทราบค่าของมุม

<u>คำชี้แจง</u> จงแสดงการหาค่าของ $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ และ $\operatorname{cosec}\theta$ ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\tan\theta$ เมื่อ $\theta = 180°$

.....

.....

.....

.....

.....

2. $\cot\theta$ เมื่อ $\theta = 300°$

.....

.....

.....

.....

.....

3. $\sec\theta$ เมื่อ $\theta = -210°$

.....

.....

.....

.....

.....

4. $\operatorname{cosec}\theta$ เมื่อ $\theta = -240°$

.....

.....

.....

.....

.....

ใบงานที่ 1.2 **เฉลย**

เรื่อง การหาค่าของ $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ และ $\operatorname{cosec}\theta$ เมื่อทราบค่าของมุม

<u>คำชี้แจง</u> จงแสดงการหาค่าของ $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ และ $\operatorname{cosec}\theta$ ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\tan\theta$ เมื่อ $\theta = 180°$

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \tan 180° \\ &= \tan(\pi) \\ &= \frac{\sin}{\cos}(\pi) \\ &= \frac{0}{-1} \\ &= 0\end{aligned}$$

2. $\cot\theta$ เมื่อ $\theta = 300°$

$$\begin{aligned}\cot\theta &= \cot 300° \\ &= \cot\frac{5\pi}{3} \\ &= \frac{\cos}{\sin}\left(\frac{5\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

3. $\sec\theta$ เมื่อ $\theta = -210°$

$$\sec\theta = \sec(-210°)$$

$$= \sec\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$= \sec\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

4. $\text{cosec}\theta$ เมื่อ $\theta = -240°$

$$\text{cosec}\theta = \text{cosec}(-240°)$$

$$= -\text{cosec}\frac{4\pi}{3}$$

$$= -\frac{1}{\sin\frac{4\pi}{3}}$$

$$= -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ **จำนวน 40 ชั่วโมง**

เรื่อง การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ **จำนวน 2 ชั่วโมง**

ผู้สอน นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล **โรงเรียนสตรีศึกษา**

ผลการเรียนรู้

13) เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและ นำไปใช้ในการแก้ปัญหา

14) แก้สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

15) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

15) ระบุได้ว่าฟังก์ชันของจำนวนจริงคือขนาดของมุมใดได้ (K)

16) เปิดตารางหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ถูกต้อง (K)

17) หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้การเทียบบัญญัติไตรยางศ์หรือสัดส่วนได้ (P)

4) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจะช่วยในการหาค่าหรือตรวจสอบค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการสำรวจ ค้นหา 2) ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้

📖 **แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching**

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

ขั้นการใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

ครูกระตุ้นความสนใจของนักเรียน โดยให้นักเรียนดูตัวอย่างตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ จากนั้นครูยกตัวอย่างขนาดของมุมที่นักเรียนได้ศึกษามาแล้ว ดังนี้

- มุม 30° จงหาค่า sin 30° , cos 30° และ tan 30°

  (**แนวตอบ** $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$)

- มุม 45° จงหาค่า sin 45° , cos 45° และ tan 45°

  (**แนวตอบ** $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $\tan 45° = 1$)

- มุม 60° จงหาค่า sin 60° , cos 60° และ tan 60°

  (**แนวตอบ** $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$ และ $\tan 60° = \sqrt{3}$)

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

1. ครูถามคำถามในหนังสือเรียน หน้า 42 ว่า “ถ้าต้องการทราบค่าของ sin 43° 30′ นักเรียนดูจากตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิตินี้ว่าได้เท่าใด ” แล้วให้นักเรียนร่วมกันตอบ

   (**แนวตอบ** sin 43° 30′ = 0.6884)

2. ครูให้นักเรียนดูตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยให้นักเรียนโทรศัพท์มือถือแสกน QR Code “การเปิดตารางหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ให้นักเรียนศึกษาและร่วมกันสังเกตขนาดมุมทางซ้าย และขนาดมุมทางขวามีความสัมพันธ์อย่างไร

   (**แนวตอบ** ขนาดของมุมทางซ้ายบวกขนาดของมุมทางขวาจะเท่ากับ 90° ซึ่งจะบอกได้ว่าตารางนี้

คือ ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ หรือ มุมที่มีขนาดตั้งแต่ 0° ถึง 90°)

3. จากนั้นครูถามคำถามเพื่อในนักเรียนเชื่อมโยงความรู้จากที่นักเรียนโหลดตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติดังนี้

- $\sin \frac{\pi}{4}$ 20′ มีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\sin \frac{\pi}{4}$ 20′ = 0.7112)
- $\cos \frac{\pi}{6}$ 10′ มีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\cos \frac{\pi}{6}$ 10′ = 0.8646)
- $\tan \frac{\pi}{3}$ 50′ มีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\tan \frac{\pi}{3}$ 50′ = 1.0617)

4. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาเนื้อหาในหนังสือเรียน หน้า 43 และทำร่วมกันทำตัวอย่างที่ 22 ข้อ 1 – 4 โดยใช้ตารางแสดงค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

5. ครูอธิบายวิธีคิดของตัวอย่างที่ 22 ในหนังสือเรียน หน้า 43 ข้อที่ 5) ให้นักเรียนดูว่ามีวิธีการคิดอย่างไร “ข้อ 5. sec 0.7738”

(**แนวตอบ** คิดจากส่วนกลับของ sec 0.7738 นั่นคือ $\sec 0.7738 = \frac{1}{\cos 0.7738}$

ดังนั้น $\sec 0.7738 = \frac{1}{0.7153} \approx 1.3980$)

6. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่แข่งขันกันหาคำตอบ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 43 คู่ไหนคิดได้ก่อนให้ยกมือขึ้น และออกมาเขียนวิธีทำบนกระดานหน้าชั้นเรียน

ชั่วโมงที่ 2

7. ครูให้นักเรียนเปิดตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติหาค่าของ sin 14° 16′ จากนั้นถามนักเรียนว่าตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติสามารถหาค่าของ sin 14° 16′ ได้หรือไม่

(**แนวตอบ** นักเรียนจะตอบว่าตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่สามารถหาค่าของ sin 14° 16′ ได้)

หลังจากนั้นครูอธิบายนักเรียนว่า เราสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือของมุมที่ไม่ได้แสดงในตารางจะต้องใช้ความรู้จากการเทียบบัญญัติไตรยางศ์หรือสัดส่วน

8. ครูอธิบายในตัวอย่างที่ 23 ข้อ 1)-3) ในหนังสือเรียน หน้า 44 ให้นักเรียนดูบนกระดานทีละขั้นตอนอย่างละเอียด พร้อมกับให้นักเรียนเปิดตารางหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติไปพร้อม ๆ กัน

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

9. ครูให้นักเรียนจับคู่ทำแล้วร่วมกันทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 44 และแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง เมื่อเสร็จแล้วครูสุ่มนักเรียน 3 คู่ ออกมาแสดงวิธีทำโดยละเอียด

10. ครูให้นักเรียนศึกษากรอบ “ข้อควรระวัง” ในหนังสือเรียน หน้า 45 “ถ้าฟังก์ชันตรีโกณใดมีค่าของฟังก์ชันลดลง เมื่อขนาดของมุมเพิ่มขึ้น ค่าที่ได้จากการเทียบบัญญัติไตรยางศ์หรือสัดส่วนต้องนำไปลบออกจากค่าตั้งต้น” ดังตัวอย่างที่ 24 ในหนังสือเรียน หน้า 45 และให้นักเรียนแต่ละคนศึกษาตัวอย่างที่ 24 ในหนังสือเรียน หน้า 45 ต่อไป

11. หลังจากนั้นครูให้นักเรียนอ่านเพิ่มเติมในกรอบ “คณิตศาสตร์น่ารู้” ในหนังสือเรียน หน้า 45 จากตัวอย่างที่ 24 ข้อ 2) คือ “เนื่องจากค่าของ sin θ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \pi$ มี 2 ค่า คือ $\sin\theta$ และ $\sin(\pi - \theta)$ ดังนั้น ข้อ 2) จึงได้ θ เท่ากับ 0.4983 และ π – 0.4983

12. ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 45 เมื่อทำเสร็จแล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ จากนั้นครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.5 ในหนังสือเรียน หน้า 46 เป็นการบ้าน

ขั้นลงมือทำ (Doing)

13. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วทำกิจกรรม ดังนี้

- ให้นักเรียนศึกษามุมเทคโนโลยี ในหนังสือเรียน หน้า 46 เครื่องคิดเลขคำนวณค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแบบฝึกทักษะ 1.5 ข้อ 2)
- เมื่อนักเรียนทุกกลุ่มทำเสร็จแล้วครูสุ่มตัวแทนนักเรียน 4 คน ออกมาแสดงวิธีการใช้เครื่องคิดเลขในการหาค่าฟังก์ชันที่กำหนดในแบบฝึกทักษะ 1.5 ข้อ 2.
- เมื่อนักเรียนนำเสนอเสร็จ ครูให้นักเรียนที่เป็นตัวแทนกลุ่มที่ออกมานำเสนอ เป็นคนคิดโจทย์ให้เพื่อน ๆ ในห้องหาคำตอบ เมื่อเพื่อนหาเสร็จนักเรียนทั้งห้องเฉลยคำตอบร่วมกัน

ขั้นสรุป

ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รอบยอดของนักเรียน ดังนี้

- ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติใช้ประโยชน์อย่างไร

  (**แนวตอบ** ใช้หาค่าฟังก์ชันค่าตรีโกณมิติหรือตรวจสอบคำตอบค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ)

- ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ไม่สามารถเปิดตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติได้จะทำอย่างไร

  (**แนวตอบ** จะใช้ความรู้จากการเทียบบัญญัติไตรยางศ์ หรือสัดส่วน)

- ถ้าในตารางการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ไม่มีค่า $\cot\theta$, $\sec\theta$ และ $\operatorname{cosec}\theta$ จะหาค่าของฟังก์ชันดังกล่าวได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** $\cot\theta$ จะหาได้จากส่วนกลับของ $\tan\theta$, $\sec\theta$ จะหาได้จากส่วนกลับของ $\cos\theta$ และ $\operatorname{cosec}\theta$ จะหาได้จากส่วนกลับของ $\sin\theta$)

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้			
1) การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 1.5 - ตรวจ Exercise 1.5 - ตรวจใบงานที่ 1.3	- แบบฝึกทักษะ 1.5 - ตรวจ Exercise 1.5 - ใบงานที่ 1.3	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอผลงาน	- แบบประเมินการนำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

11) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

12) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

13) ใบงานที่ 1.3 เรื่อง การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แหล่งการเรียนรู้

1) ห้องสมุด
2) แหล่งชุมชน
3) อินเทอร์เน็ต

ใบงานที่ 1.3

เรื่อง การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

คำชี้แจง จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยใช้ตารางแสดงค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. sin 60° = ...
2. sin 89° 50′ = ...
3. cos 11° 10′ = ...
4. tan 59° 50′ = ...
5. sec 70° 20′ = ...
6. cot 22° 40′ = ...
7. cosec 25° 30′ = ...
8. sin 62° 18′

   .....

   .....

   .....

   .....
9. cos 44° 35′

   .....

   .....

   .....

   .....
10. tan 78° 42′

    .....

    .....

.....

.....

ใบงานที่ 1.3

เฉลย

เรื่อง การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

คำชี้แจง จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยใช้ตารางแสดงค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. sin 60° = 0.8660
2. sin 89° 50′ = 0.0204
3. cos 11° 10′ = 0.1937
4. tan 59° 50′ = 1.653
5. sec 70° 20′ = 2.833
6. cot 22° 40′ = 2.394
7. cosec 25° 30′ = 2.323
8. sin 62° 18′

   จากตารางจะได้ sin 62° 10′ = 0.8760

   sin 62° 20′ = 0.8774

   จากค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติข้างต้น จะได้ว่า

   ค่าของมุมที่เพิ่มขึ้น 10′ ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น 0.0014

   ค่าของมุมที่เพิ่มขึ้น 8′ ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น $\frac{0.0014}{10} \times 8 \approx 0.0011$

   ดังนั้น sin 62° 18′ $\approx$ 0.8760 + 0.0011 = 0.8771 ■
9. cos 44° 35′

   จากตารางจะได้ cos 44° 30′ = 0.7133

   cos 44° 40′ = 0.7112

   จากค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติข้างต้น จะได้ว่า

ค่าของมุมที่เพิ่มขึ้น 10′ ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น 0.0021

ค่าของมุมที่เพิ่มขึ้น 5′ ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น $\frac{0.0021}{10} \times 5 \approx 0.0011$

ดังนั้น cos 44° 35′ $\approx$ 0.7133 + 0.0011 = 0.7144 ■

10. tan 78° 42′

จากตารางจะได้ tan 78° 40′ = 4.574

tan 78° 50′ = 4.638

จากค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติข้างต้น จะได้ว่า

ค่าของมุมที่เพิ่มขึ้น 10′ ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น 0.064

ค่าของมุมที่เพิ่มขึ้น 2′ ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น $\frac{0.064}{10} \times 2 \approx 0.0128$

ดังนั้น tan 78° 42′ $\approx$ 4.574 + 0.0128 = 4.5868 ■

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ **จำนวน 40 ชั่วโมง**

เรื่อง กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ **จำนวน 3 ชั่วโมง**

ผู้สอน นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล **โรงเรียนสตรีศึกษา**

ผลการเรียนรู้

16) เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและ นำไปใช้ในการแก้ปัญหา

17) แก้สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

18) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

18) ระบุพิกัดของวงกลมหนึ่งหน่วยได้ (K)

19) บอกค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของกราฟฟังก์ชันตรีโกณได้ (K)

20) บอกค่าโดเมน และเรนจ์ของกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ (K)

21) หาคาบของกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ (P)

22) หาค่าแอมพลิจูดของกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ (P)

23) เขียนกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ (P)

24) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

$$f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(\mathrm{x}) = \mathrm{a}\sin(\mathrm{nx})$$

เมื่อ a และ n เป็นจำนวนจริง ที่ n > 0 คาบคือ $\frac{2\pi}{\mathrm{n}}$ แอมพลิจูดคือ $|\mathrm{a}|$ เรนจ์คือ [-a, a], a > 0

$$f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(\mathrm{x}) = \mathrm{a}\cos(\mathrm{nx})$$

เมื่อ a และ n เป็นจำนวนจริง ที่ n > 0 คาบคือ $\frac{2\pi}{\mathrm{n}}$ แอมพลิจูดคือ $|\mathrm{a}|$ เรนจ์คือ [-a, a], a > 0

กราฟของ $f(x) = a\sin(nx)$ และ $f(x) = a\cos(nx)$ เมื่อแอมพลิจูดมากขึ้น จุดสูงสุดและจุดต่ำสุดของกราฟก็จะยิ่งต่างกันมาก และเมื่อคาบมากขึ้นจุดตัดแกน X ก็จะยิ่งเข้าใกล้กันมากขึ้น

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการสำรวจ ค้นหา 2) ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้

📖 **แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching**

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

ขั้นการใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

1. ครูกระตุ้นความสนใจของนักเรียน โดยครูและนักเรียนร่วมกันเขียนกราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น และฟังก์ชันกำลังสอง ดังนี้ $y = x + 3$ และ $y = x^2 + x - 6$ โดยครูให้นักเรียนร่วมกันสร้างตารางหาค่า x และ y เพื่อนำไปเขียนกราฟ

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

1. ครูให้นักเรียนแต่ละคนเขียนกราฟของ $y = \sin x$ เมื่อ $0 \le x \le \pi$ โดยให้นักเรียนเริ่มจากการสร้างตารางหาค่า x และ y จากนั้นครูให้นักเรียนนำค่า x และ y ไปเขียนกราฟ

2. เมื่อนักเรียนแต่ละคนเขียนกราฟเสร็จครูยังไม่เฉลยความถูกต้องของกราฟ แต่ครูให้นักเรียนสร้างตาราง

ต่อไปจากเดิม คือเปลี่ยนช่วงของ x จาก $0 \leq x \leq \pi$ เป็น $0 \leq x \leq 2\pi$ จากนั้นครูให้นักเรียนนำค่า x และ y ที่เพิ่มมาไปเขียนกราฟ เมื่อนักเรียนแต่ละคนเขียนกราฟเสร็จครูให้นักเรียนเปลี่ยนกับเพื่อนข้าง ๆ ตรวจสอบความถูกต้อง เมื่อนักเรียนตรวจสอบความถูกต้องและเป็นข้อสรุปความถูกต้องที่เห็นตรงกันแล้ว ครูให้นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้งจากหนังสือเรียน หน้า 48 – 49

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

3. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาทำความเข้าใจเนื้อหาในหนังสือเรียน หน้า 49 และครูอธิบายเน้นย้ำนักเรียนเพิ่มว่า จาก $\sin(2n\pi + \alpha) = \sin\alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้กราฟของฟังก์ชันไซน์ ดังกราฟของ $y = \sin x$ เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

- จากกราฟของ y = sin x จะเห็นว่า กราฟจะแบ่งแกน x ออกเป็นช่วงย่อยที่สั้นที่สุด 2 ช่วง โดยที่ช่วงย่อยแต่ละช่วงมีความยาวเท่ากัน และกราฟในแต่ละช่วงย่อยมีลักษณะเหมือนกัน เรียกความยาวของช่วงย่อยดังกล่าวว่า **คาบ** (period) และเรียกฟังก์ชันของกราฟว่า **ฟังก์ชันที่เป็นคาบ** (periodic function)
- จากกราฟช่วง $-2\pi \leq x \leq 0$ คือ 1 คาบ และช่วง $0 \leq x \leq 2\pi$ คือ 1 คาบ สรุปได้ว่าจากกราฟ $y = \sin x$ คือ มีช่วงย่อยที่สั้นที่สุด 4 ช่วง หรือมีความความยาวของช่วงย่อย 2 คาบ
- จากกราฟ เป็นกราฟที่มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด ซึ่งจะเรียกค่าที่เท่ากับครึ่งหนึ่งของค่าสูงสุดลบด้วยค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่เป็นคาบว่า แอมพลิจูด (amplitude) ซึ่งจะได้ บทนิยาม ดังต่อไปนี้

บทนิยาม แอมพลิจูดของฟังก์ชันที่เป็นคาบ เท่ากับ $\frac{\text{ค่าสูงสุด} - \text{ค่าต่ำสุด}}{2}$

4. ครูอธิบายว่าจากกราฟของ $y = \sin x$ จะเห็นว่า $-2\pi \leq x \leq 0$ และ $0 \leq x \leq 2\pi$ เป็นช่วงที่มีความยาว 2π เท่ากัน

5. ครูให้นักเรียนศึกษากราฟของ $y = \sin x$ เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ ในหนังสือเรียน หน้า 50 หลังจากนั้นครูถามคำถามเพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน ดังนี้

- เมื่อนักเรียนพิจารณากราฟในช่วง $-2\pi \leq x \leq 0$ จะเห็นว่ากราฟของฟังก์ชันเป็นกราฟเส้นโค้งเปิดลงด้านล่างหรือที่เราเข้าใจว่า กราฟคว่ำ ตั้งแต่ช่วง -2π ถึง $-\pi$ มีค่าต่ำสุด หรือสูงสุดเท่าใด

  (**แนวตอบ** มีค่าสูงสุด เท่ากับ 1)

- กราฟเส้นโค้งเปิดขึ้นด้านบนหรือที่เราเข้าใจว่ากราฟหงาย ตั้งแต่ช่วง $-\pi$ ถึง 0 จะมีค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดเท่าใด

  (**แนวตอบ** มีค่าต่ำสุด เท่ากับ -1)

- จากฟังก์ชัน $y = \sin x$ มีแอมพลิจูดเท่ากับเท่าใด

(**แนวตอบ** $\frac{1-(-1)}{2} = 1$)

- โดเมนของฟังก์ชันไซน์ คืออะไร

  (**แนวตอบ** เซตของจำนวนจริง)

- เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ คืออะไร

  (**แนวตอบ** [-1,1])

- กราฟของฟังก์ชันไซน์ตัดแกน X ที่จุด (x,0) เมื่อ x คือเท่าใด

  (**แนวตอบ** ... , $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$, ...)

- กราฟของฟังก์ชันไซน์ตัดแกน Y ที่จุดใด

  (**แนวตอบ** (0,0))

6. ครูให้นักเรียนศึกษา หัวข้อที่ 2 กราฟของ $y = \cos x$ เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ ในหนังสือเรียน หน้า 50 หลังจากนั้นครูถามคำถามเพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน ดังนี้

- เมื่อนักเรียนพิจารณากราฟในช่วง $-2\pi \leq x \leq 0$ จะเห็นว่ากราฟของฟังก์ชันเป็นกราฟเส้นโค้งเปิดลงด้านล่างหรือที่เราเข้าใจว่า กราฟคว่ำ ตั้งแต่ช่วง $\frac{-3\pi}{2}$ ถึง $\frac{-\pi}{2}$ มีค่าต่ำสุด หรือสูงสุดเท่าใด

  (**แนวตอบ** มีค่าต่ำสุด เท่ากับ 1)

- กราฟเส้นโค้งเปิดขึ้นด้านบนหรือที่เราเข้าใจว่ากราฟหงาย ตั้งแต่ช่วง $\frac{-\pi}{2}$ ถึง $\frac{\pi}{2}$ จะมีค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดเท่าใด

  (**แนวตอบ** มีค่าต่ำสุด เท่ากับ -1)

- จากฟังก์ชัน $y = \cos x$ มีแอมพลิจูดเท่ากับเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\frac{1-(-1)}{2} = 1$)

- โดเมนของฟังก์ชันไซน์ คืออะไร

  (**แนวตอบ** เซตของจำนวนจริง)

- เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ คืออะไร

  (**แนวตอบ** [-1,1])

- กราฟของฟังก์ชันไซน์ตัดแกน X ที่จุด (0, x) เมื่อ x คือเท่าใด

  (**แนวตอบ** ... , $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, ...)

- กราฟของฟังก์ชันไซน์ตัดแกน Y ที่จุดใด

(**แนวตอบ** (0,1))

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

7. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 25 หลังจากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของกราฟ $y = \sin x$ คือเท่าใด

  (**แนวตอบ** เรนจ์ คือ [-1, 1] คาบคือ 2π และแอมพลิจูด คือ 1)

- เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของกราฟ $y = 2\sin x$ คือเท่าใด

  (**แนวตอบ** เรนจ์ คือ [-2, 2] คาบคือ 2π และแอมพลิจูด คือ 2)

- เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของกราฟ $y = 3\sin x$ คือเท่าใด

  (**แนวตอบ** เรนจ์ คือ [-3, 3] คาบคือ 2π และแอมพลิจูด คือ 3)

8. หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 51 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนเฉลยคำตอบลองทำดู

9. จากตัวอย่างที่ 25 และลองทำดู ในหนังสือ เรียน 51 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปการหาแอมพลิจูดและเรนจ์ของฟังก์ชันในรูปทั่วไป ดังนี้

กำหนดให้ $f: R \to R, f(x) = a\sin x$

จะได้ว่า แอมพลิจูดของฟังก์ชัน เท่ากับ |a|

เรนจ์ของฟังก์ชัน เท่ากับ [-a, a]

10. ครูให้นักเรียนเขียนกราฟของ $y = 4\sin 2x$ และ $y = 8\sin 6x$ ซึ่งเป็นโจทย์ของตัวอย่างที่ 27-28 ในหนังสือเรียน หน้า 52-53 โดยนักเรียนจะยังไม่เปิดหนังสือเรียน เมื่อนักเรียนเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้เสร็จครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของกราฟ $y = 4\sin 2x$ คือเท่าใด

  (**แนวตอบ** เรนจ์ คือ [-4, 4] คาบคือ π และแอมพลิจูด คือ 4)

- เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของกราฟ $y = 8\sin 6x$ คือเท่าใด

  (**แนวตอบ** เรนจ์ คือ [-8, 8] คาบคือ $\frac{\pi}{3}$ และแอมพลิจูด คือ 8)

11. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนหน้า 52-53 ท้ายตัวอย่างที่ 27-28 โดยครูเขียนโจทย์บนกระดาน เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

12. ครูให้นักเรียนหาความสัมพันธ์ของคาบจากของฟังก์ที่นักเรียนได้เขียนกราฟ โดยครูกำหน $f: R \to R, f(x) = a\sin(nx)$ เมื่อ $n > 0$

(**แนวตอบ** จะได้ว่า คาบของฟังก์ชัน เท่ากับ $\frac{2\pi}{n}$)

13. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปการหาแอมพลิจูด เรนจ์ และคาบของฟังก์ชันไซน์ในรูปทั่วไป ดังนี้ กำหนดให้ $f: R \to R, f(x) = a\sin(nx)$ เมื่อ $n > 0$

จะได้ว่า แอมพลิจูดของฟังก์ชัน เท่ากับ |a|

เรนจ์ของฟังก์ชัน เท่ากับ [-a, a]

คาบของฟังก์ชัน เท่ากับ $\frac{2\pi}{n}$

14. ครูกล่าวว่าในทำนองการหาแอมพลิจูด เรนจ์ และคาบของฟังก์ชันโคไซน์ในรูปทั่วไป ก็สามารถหาได้ดังนี้

กำหนดให้ $f: R \to R, f(x) = a\cos(nx)$ เมื่อ $n > 0$

จะได้ว่า แอมพลิจูดของฟังก์ชัน เท่ากับ |a|

เรนจ์ของฟังก์ชัน เท่ากับ [-a, a]

คาบของฟังก์ชัน เท่ากับ $\frac{2\pi}{n}$

15. ครูให้นักเรียนแต่ละคนศึกษาตัวอย่างที่ 28 – 29 ในหนังสือเรียน หน้า 53-54 จากนั้นให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 53-54 เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

16. ครูแนะนักเรียนว่าการเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติบางฟังก์ชันอาจต้องใช้ความรู้เรื่องการเลื่อนขนาน โดยใช้การเลื่อนขนานกราฟรูปมาตรฐานในแนวแกนนอนหรือแนวแกนตั้ง

17. ครูอธิบายการเขียนกราฟจากตัวอย่างที่ 30 - 31 บนกระดานหน้าชั้นเรียนอย่างละเอียด หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 55-56 เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

18. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.6 ข้อ 1.-3. เป็นการบ้าน

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

1. ครูกล่าวว่าถ้านักเรียนต้องทราบในการเขียนกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ นักเรียนควรทราบโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ดังนี้

- โดเมนของฟังก์ชันแทนเจนต์ คือ $\{ x \mid x \in R, x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in I \}$
- โดเมนของฟังก์ชันเซแคนต์ คือ $\{ x \mid x \in R, x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in I \}$
- โดเมนของฟังก์ชันโคแทนเจนต์ คือ $\{ x \mid x \in R, x \neq n\pi, n \in I \}$
- โดเมนของฟังก์ชันโดเซแคนต์ คือ $\{ x \mid x \in R, x \neq n\pi, n \in I \}$

2. ครูให้นักเรียนแต่ละคนศึกษากราฟของ $y = \tan x$ ในหนังสือเรียน หน้า 56 หลังจากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- จากกราฟ $y = \tan x$ ในแต่ละคาบมีค่าต่ำสุด หรือค่าสูงสุด และมีแอมพลิจูดหรือไม่

(แนวตอบ กราฟของ $y = \tan x$ ในแต่ละคาบไม่มีค่าต่ำสุดและค่าสูงสุด ดังนั้น จึงทำให้ไม่มีแอมพลิจูด)

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

1. ครูอธิบายกราฟ $y = \tan x$ เมื่อพิจารณาเป็นกราฟย่อย ซึ่งแต่ละช่วงย่อยมีความยาวเท่ากับ π ดังนั้น ฟังก์ชันแทนเจนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ และมีคาบเท่ากับ π

2. ครูให้นักเรียนศึกษากราฟของฟังก์ชันโคเซแคนต์ ฟังก์ชันเซแคนต์ และฟังก์ชันโคแทนเจนต์ ซึ่งทั้ง 3 ฟังก์ชัน เป็นส่วนกลับของฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ และฟังก์ชันแทนเจนต์ หน้า 58-59 เมื่อนักเรียนศึกษาเสร็จครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- จากกราฟของ $y = \operatorname{cosec} x$ ค่าของฟังก์ชันโคเซแคนต์เป็นจำนวนจริงทุกจำนวนยกเว้นค่าใด

(**แนวตอบ** ค่าระหว่าง -1 กับ 1)

- จากกราฟ $y = \operatorname{cosec} x$ เรนจ์ของฟังก์ชันโคเซแคนต์คือเท่าใด

(**แนวตอบ** $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$)

- ฟังก์ชันโคเซแคนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับเท่าใด

(**แนวตอบ** 2π)

- จากกราฟฟังก์ชันโคเซแคนต์มีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด และมีแอมพลิจูดหรือไม่

(**แนวตอบ** กราฟของ $y = \operatorname{cosec} x$ ไม่มีค่าต่ำสุดและค่าสูงสุด ดังนั้น จึงทำให้ไม่มี

แอมพลิจูด)

- จากกราฟของ $y = \sec x$ ค่าของฟังก์ชันโคเซแคนต์เป็นจำนวนจริงทุกจำนวน ยกเว้นค่าใด

  (**แนวตอบ** ค่าระหว่าง -1 กับ 1)

- จากกราฟ $y = \sec x$ เรนจ์ของฟังก์ชันเซแคนต์คือเท่าใด

  (**แนวตอบ** $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$)

- ฟังก์ชันเซแคนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับเท่าใด

  (**แนวตอบ** 2π)

- จากกราฟฟังก์ชันเซแคนต์มีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด และมีแอมพลิจูดหรือไม่

  (**แนวตอบ** กราฟของ $y = \sec x$ ไม่มีค่าต่ำสุดและค่าสูงสุด ดังนั้น จึงทำให้ไม่มีแอมพลิจูด)

3. ครูให้นักเรียนสังเกตกราฟ $y = \cot x$ ซึ่งเป็นส่วนกลับของ กราฟ $y = \tan x$ ทำให้ค่าของฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับ π และกราฟดังกล่าวไม่มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด จึงไม่มีแอมพลิจูด "ครูถามนักเรียนว่าเพราะเหตุใด กราฟ $y = \cot x$ จึงไม่แอมพลิจูด"

   (แนวตอบ เนื่องจากแอมพลิจูดจะหาค่าได้กราฟจะต้องมีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด ซึ่งจะมีแค่กราฟ $y = \sin x$ และกราฟ $y = \cos x$ ที่สามารถหาค่าแอมพลิจูดได้)

ขั้นลงมือทำ (Doing)

ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วทำกิจกรรม ดังนี้

- ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำแบบทักษะ 1.6 ในหนังสือเรียน หน้า 60 ข้อ 4.-6.
- เมื่อนักเรียนทุกกลุ่มทำเสร็จแล้วครูสุ่มตัวแทนนักเรียน 11 คน ออกมาแสดงทำโดยละเอียดหน้าชั้นเรียน โดยมีครูและเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความถูกต้อง

ขั้นสรุป

ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- โดเมนและเรนจ์ของกราฟ $y = \sin x$ คืออะไร

  (**แนวตอบ** โดเมน คือ เซตของจำนวนจริง และเรนจ์ คือ [-1,1])

- โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน $y = \cos x$ คืออะไร

  (**แนวตอบ** โดเมน คือ เซตของจำนวนจริง และเรนจ์ คือ [-1,1])

- เราจะหาค่าแอมพลิจูดของกราฟได้ กราฟดังกล่าวต้องมีค่าอะไรบ้าง และค่าแอมพลิจูดหาได้จากสูตรใด

- (**แนวตอบ** ค่าสูงสุด และค่าต่ำสุด และหาค่าแอมพลิจูด $= \frac{\text{ค่าสูงสุด} - \text{ค่าต่ำสุด}}{2}$)

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 1.6 - ตรวจ Exercise 1.6	- แบบฝึกทักษะ 1.6 - Exercise 1.6	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอผลงาน	- แบบประเมินการนำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

14) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

15) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แหล่งการเรียนรู้

1) ห้องสมุด 2) แหล่งชุมชน 3) อินเทอร์เน็ต

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ **จำนวน 40 ชั่วโมง**

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม **จำนวน 3 ชั่วโมง**

ผู้สอน นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล **โรงเรียนสตรีศึกษา**

ผลการเรียนรู้

19) เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและ นำไปใช้ในการแก้ปัญหา

20) แก้สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

21) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

25) บอกส่วนประกอบที่สำคัญของวงกลมหนึ่งหน่วยได้ (K)

26) ระบุพิกัดของวงกลมหนึ่งหน่วยได้ (K)

27) พิสูจน์ที่มาของสูตรฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงและมุมได้ (P)

28) หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงและมุมได้ (P)

29) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\ \cos\ \beta + \sin\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$\sin(\alpha -\ \beta) = \sin\alpha \cos\ \beta - \cos\alpha \sin\beta$$

$$\tan(\alpha +\ \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

$$\tan(\alpha -\ \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$$

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการสำรวจ ค้นหา 2) ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้

📖 **แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching**

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

ขั้นการใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

1. ครูกระตุ้นความสนใจของนักเรียน โดยให้นักเรียนดูหน้า 61 จากนั้นครูอธิบายว่าจากหัวข้อที่ผ่านมาได้ศึกษาการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียวหรือของมุมเพียงมุมเดียวมาแล้ว ในหัวข้อนี้ให้นักเรียนหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนสองจำนวนและมุมสองมุม

2. ครูถามคำถามเพื่อทบทวนความรู้เดิมในหนังสือเรียน หน้า 61 ดังนี้

- กราฟวงกลมดังกล่าวเราเรียกว่าวงกลมอะไร

  (แนวตอบ วงกลมหนึ่งหน่วย)

- ถ้าลากเส้นตรงจากจุด P(1, 0) ไปยังจุด $P_3(x_3, y_3)$ หรือจากจุด $P_1(x_1, y_1)$ ไปยังจุด $P_2(x_2, y_2)$ เราเรียกเส้นตรงนี้ว่าอะไร

  (แนวตอบ คอร์ด)

- เนื่องจากจุด (x_1, y_1) เป็นจุดที่อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้น สมการวงกลมที่ผ่านจุด (x_1, y_1)

คืออะไร เพราะเหตุใด

(แนวตอบ $x_1^2 + y_1^2 = 1$ เพราะเป็นสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง (0, 0) และรัศมี 1 หน่วย)

3. ครูให้นักเรียนศึกษา พิจารณาค่าของ $\cos(\alpha - \beta)$ เมื่อ α และ β เป็นจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ ดังรูปหน้า 61

4. ครูอธิบายการพิสูจน์ที่นำมาซึ่งที่มาของสูตร $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$ หรือโคไซน์ของผลต่างระหว่างจำนวนจริงสองจำนวนหรือมุมสองมุม

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

1. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาการหาค่าของ $\cos(\alpha - \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$ และ$\sin(\alpha - \beta)$ โดยจะใช้สูตร $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$ ซึ่งจะทำให้สรุปได้ว่า

- $\cos(\alpha + \beta)$ หาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$)

- $\sin(\alpha + \beta)$ หาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$)

- $\sin(\alpha - \beta)$ หาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$)

2. ครูให้นักเรียนหาค่าของ $\tan(\alpha + \beta)$ และ $\tan(\alpha - \beta)$ เมื่อเราทราบค่าของ $\sin(\alpha + \beta)$ และ $\cos(\alpha + \beta)$

(แนวตอบ $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$

$= \dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$

$= \dfrac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$, เมื่อ $\cos\alpha \neq 0$ และ $\cos\beta \neq 0$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

สรุปได้ว่า $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

1. ครูให้นักเรียนทำ “Thinking Time” ในหนังสือเรียน หน้า 64
2. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “Thinking Time” ในหนังสือเรียน หน้า 64 ดังนี้

(**แนวตอบ** จาก $\cot(\alpha + \beta) = \frac{1}{\tan(\alpha + \beta)}$

จะได้ $\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$

$$= \frac{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}$$

$$= \frac{\frac{\cos\alpha \cos\beta}{\sin\alpha \sin\beta} - \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin\alpha \sin\beta}}{\frac{\sin\alpha \cos\beta}{\sin\alpha \sin\beta} + \frac{\cos\alpha \sin\beta}{\sin\alpha \sin\beta}}$$, เมื่อ $\sin\alpha \neq 0$ และ $\sin\beta \neq 0$

$$= \frac{\cot\alpha \cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$$

สรุปได้ว่า $\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot\alpha \cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$

ในทำนองเดียวกัน $\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\alpha \cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$ ■)

3. ครูให้นักเรียนนำสูตรที่ได้นำมาศึกษาตัวอย่างที่ 32–33 และทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 64-65 เมื่อนักเรียนทำ “ลองทำดู” เสร็จ ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

4. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 34 และทำ “ลองทำดู” พร้อมกัน

5. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.7 ระดับพื้นฐาน เป็นการบ้าน

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

3. ครูเพิ่มเติมให้สิ่งที่นักเรียนต้องทราบ คือ เราสามารถใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของมุม เมื่อโจทย์หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ รวมทั้งโจทย์ที่ต้องแสดงการพิสูจน์

4. ครูยกตัวอย่าง พร้อมถามคำถาม ดังนี้

- ถ้าต้องการทราบค่า x ของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนด ค่า $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$

  (**แนวตอบ** จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส หรือสมการวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง (0, 0) รัศมี 1 หน่วย

  จะได้ว่า $x^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1^2$

  $X^2 = \frac{1}{2}$

  $X = \frac{1}{\sqrt{2}}$

  ดังนั้น พิกัด คือ $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$)

- ถ้าต้องการทราบค่า y ของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนด ค่า $\cos B = \frac{3}{5}$

  (**แนวตอบ** จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส หรือสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง (0,0) และรัศมี 1 หน่วย

  จะได้ว่า $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + y^2 = 1^2$

  $y^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2$

$$y = \frac{4}{5}$$

ดังนั้น พิกัด คือ $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$)

5. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 35 – 36 ในหนังสือเรียน หน้า 67-68 ต้องใช้ความรู้เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส เข้ามาช่วยในการคิดคำนวณ

6. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 35 -36 ในหนังสือเรียน หน้า 67-68 หลังจากที่ครูอธิบายแล้ว นักเรียนทำ “ลองทำดู” เมื่อนักเรียนทำ “ลองทำดู” เสร็จ ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

7. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 37 ในหนังสือเรียน หน้า 69 ครูอธิบายเพิ่มเติม และให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 70 ไปพร้อม ๆ กัน

8. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 38 – 40 ในหนังสือเรียน หน้า 70 และทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 70 เมื่อนักเรียนทำ “ลองทำดู” เสร็จ ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

9. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.7 ในหนังสือเรียน หน้า 72 ข้อ 1.-4. เป็นการบ้าน

ขั้นลงมือทำ (Doing)

ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วทำกิจกรรม ดังนี้

- ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำแบบทักษะ 1.7 ในหนังสือเรียน หน้า 60 ข้อ 5.-11.
- เมื่อนักเรียนทุกกลุ่มทำเสร็จแล้วครูสุ่มตัวแทนนักเรียน 18 คน ออกมาแสดงทำโดยละเอียดหน้าชั้นเรียน โดยมีครูและเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความถูกต้อง

ขั้นสรุป

ครูถามคำถามเพื่อประเมินความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- $\cos(\alpha - \beta)$ หาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos \beta + \sin\alpha \sin\beta$)

- $\cos(\alpha + \beta)$ หาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$)
- $\sin(\alpha + \beta)$ หาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$)
- $\sin(\alpha - \beta)$ หาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$)
- $\tan(\alpha + \beta)$ หาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$)
- $\tan(\alpha - \beta)$ หาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$)

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้			
1) ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 1.7 - ตรวจ Exercise 1.7	- แบบฝึกทักษะ 1.7 - Exercise 1.7	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอผลงาน	- แบบประเมินการนำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

16) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

17) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แหล่งการเรียนรู้

1) ห้องสมุด
2) แหล่งชุมชน
3) อินเทอร์เน็ต

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ **จำนวน 40 ชั่วโมง**

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่า สามเท่า และครึ่งเท่าของจำนวนจริง **จำนวน 3 ชั่วโมง**

ผู้สอน นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล **โรงเรียนสตรีศึกษา**

ผลการเรียนรู้

22) เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและ นำไปใช้ในการแก้ปัญหา

23) แก้สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

24) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

30) คำนวณค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติสองเท่า สามเท่า และครึ่งเท่าของจำนวนจริงหรือมุมได้ (K)

31) แก้ปัญหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติสองเท่า สามเท่า และครึ่งเท่าของจำนวนจริงหรือมุมได้ (P)

32) มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่า สามเท่า และครึ่งเท่าของจำนวนจริงหรือมุม

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$= 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\tan(3\alpha) = \frac{3\tan\alpha+\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}}$$

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการสำรวจ ค้นหา 2) ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้

แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

ขั้นทบทวนความรู้เดิมเชื่องโยงความรู้ใหม่

8. ครูทบทวนความรู้เดิมเรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกของจำนวนจริงหรือมุม ด้วยการถามคำถามดังนี้

- $\sin(A+B)$ หาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$)

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

1. ครูให้เขียน $\sin 2\alpha$ แล้วถามนักเรียนว่าจะหาได้อย่างไร โดยครูยังไม่ให้นักเรียนเปิดหนังสือเรียน

(**แนวตอบ** ครูต้องการให้นักเรียนตอบโดยอาศัยความรู้ของเรื่องที่เรียนไปก่อนหน้านี้ นั่นคือ ให้นักเรียนตอบว่าแยก 2α เป็น $\alpha+\alpha$ จะได้ว่า $\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha)$)

เมื่อนักเรียนตอบได้เช่นนี้ครูถามนักเรียนต่อไปว่า $\sin(\alpha+\alpha)$ หาได้อย่างไร

(**แนวตอบ** $\sin(\alpha+\alpha)$ หาได้จากสูตร $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

ซึ่งจะได้ว่า $\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$

$=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha$

$=2\sin\alpha\cos\alpha$)

2. ในทำนองเดียวกันครูถามนักเรียนว่า $\cos 2\alpha$ จะหาได้อย่างไร โดยครูยังไม่ให้นักเรียนเปิดหนังสือเรียนเช่นเดิม

(**แนวตอบ** $\cos 2\alpha$ จะหาได้จาก $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ ซึ่งจะได้ว่า

$\cos(2\alpha)=\cos(\alpha+\alpha)$

$=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$)

3. เมื่อนักเรียนหา $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ ได้แล้ว $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ ครูเขียนลงบนกระดานและกำหนดให้เป็นสมการที่ 1 จากนั้นครูบอกกับนักเรียนว่า $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ เสมอ เพราะเป็นเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ หลังจากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- ถ้านักเรียนแทนค่า $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ ลงในสมการที่ 1 จะได้ $\cos 2\alpha$ เท่ากับเท่าไร

  (**แนวตอบ** $\cos 2\alpha=(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha$

  $=1-2\sin^2\alpha$)

- ถ้านักเรียนแทนค่า $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ ลงในสมการที่ 1 จะได้ $\cos 2\alpha$ เท่ากับเท่าไร

  (**แนวตอบ** $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)$

  $=2\cos^2\alpha-1$)

4. หลังจากนั้นครูถามนักเรียนต่อไปอีกว่า $\tan 2\alpha$ จะหาได้อย่างไร โดยครูยังไม่ให้นักเรียนเปิดหนังสือเรียนเช่นเดิม

(**แนวตอบ** $\tan 2\alpha$ จะหาได้จาก $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ ซึ่งจะได้ว่า

$\tan(2\alpha)=\tan(\alpha+\alpha)$

$=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$

$=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$)

5. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 41 ในหนังสือเรียน หน้า 75 เมื่อนักเรียนศึกษาเสร็จครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- ในตัวอย่างที่ 41 $\cos\theta$ เท่ากับเท่าไร

  (แนวตอบ $\cos\theta = -\frac{3}{5}$)
- $\sin 2\theta, \cos 2\theta$ และ $\tan 2\theta$ เท่ากับเท่าไร

  (แนวตอบ $\sin 2\theta = -\frac{24}{25}, \cos 2\theta = -\frac{7}{25}$ และ $\tan 2\theta = \frac{24}{7}$)

6. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 42 ในหนังสือเรียน หน้า 76 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

7. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ของตัวอย่างที่ 41 ในหนังสือเรียน หน้า 75 และ “ลองทำดู” ของตัวอย่างที่ 42 ในหนังสือเรียน หน้า 76 เมื่อนักเรียนทุกคนทำเสร็จแล้ว ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ
8. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.8 ข้อ 1., ข้อ 4. และข้อ 5.

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

9. ครูถามนักเรียนว่า $\sin 3\alpha$ จะหาได้อย่างไร

   (แนวตอบ 3α เป็น $2\alpha + \alpha$ จะได้ว่า $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha)$)

   เมื่อนักเรียนตอบได้เช่นนี้ครูถามนักเรียนต่อไปว่า $\sin(2\alpha + \alpha)$ หาได้อย่างไร

   (แนวตอบ $\sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha$
   $= \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha$
   $= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$)

10. ในทำนองเดียวกันครูถามนักเรียนว่า $\cos 3\alpha$ จะหาได้อย่าง โดยครูยังไม่ให้นักเรียนเปิดหนังสือเรียนเช่นเดิม

   (แนวตอบ $\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha + \alpha)$
   $= \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha$
   $= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$)

11. หลังจากนั้นครูถามนักเรียนต่อไปอีกว่า $\tan 3\alpha$ จะหาได้อย่าง โดยครูยังไม่ให้นักเรียนเปิดหนังสือเรียน เช่นเดิม

(แนวตอบ $\tan(3\alpha) = \frac{3\tan\alpha+\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$)

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

10. ครูให้นักเรียนจับคู่และร่วมกันศึกษาตัวอย่างที่ 43 และตัวอย่างที่ 44 ในหนังสือเรียน หน้า 78 หลังจากนั้น ครูสุ่มถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- ในตัวอย่างที่ 43 โจทย์ให้อะไรมา

  (แนวตอบ $\cos 17° = 0.9563$)
- ในตัวอย่างที่ 43 $\cos 51°$ จะหาได้อย่างไร และมีค่าเท่ากับเท่าไร

  (แนวตอบ $\cos 51°$ จะหาได้จาก $\cos 3(17°)$ และ $\cos 51° \approx 0.6293$)
- ในตัวอย่างที่ 44 โจทย์ให้อะไรมา

  (แนวตอบ $\tan A = \frac{3}{4}$ เมื่อ $0 < A < \frac{\pi}{2}$)
- ในตัวอย่างที่ 44 $\tan A$ จะหาได้อย่างไร และมีค่าเท่ากับเท่าไร

  (แนวตอบ $\tan 3A$ เมื่อ $0 < A < \frac{\pi}{2}$ จะหาได้จาก $\tan 3A = \frac{3\tan A+\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$ และ $\tan 3A = -\frac{117}{44}$)

11. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ของตัวอย่างที่ 43 และ “ลองทำดู” ของตัวอย่างที่ 44 ในหนังสือเรียน หน้า 78 เมื่อนักเรียนทุกคนทำเสร็จแล้ว ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

12. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.8 ข้อ 2. และข้อ 6.

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

13. ครูถามนักเรียนว่า $\cos\frac{\alpha}{2}$ จะหาได้อย่างไร

(แนวตอบ $\cos\alpha = \cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$\cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$

$2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\alpha + 1$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\cos\alpha+1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}}$$)

14. ในทำนองเดียวกันครูถามนักเรียนว่า $\sin\frac{\alpha}{2}$ จะหาได้อย่างไร โดยครูยังไม่ให้นักเรียนเปิดหนังสือเรียนเช่นเดิม

(แนวตอบ ตอบ $\cos\alpha = \cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$\cos\alpha = 1-2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1-\cos\alpha$$

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$)

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

15. ครูให้นักเรียนจับคู่และร่วมกันศึกษาตัวอย่างที่ 45 ในหนังสือเรียน หน้า 79 หลังจากนั้น ครูสุ่มถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\sin 15°$ จะหาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\sin 15°$ จะหาได้จาก $\sin\frac{30°}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}$)

- $\sin 15°$ เท่ากับเท่าไร

  (แนวตอบ $\sin 15° = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$)

16. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 80 เมื่อทำเสร็จแล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.8 ข้อ 3) เป็นการบ้าน

ขั้นลงมือทำ (Doing)

17. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วให้ทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ดังนี้

- ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.8 ข้อ 7. - ข้อ 10.
- ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจร่วมกัน หลังจากนั้นครูลุ่มนักเรียนในแต่ละกลุ่มออกมาเฉลยคำตอบ อย่างละเอียด

ขั้นสรุป

ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รอบยอดของนักเรียน ดังนี้

- $\sin(2\alpha)$ หาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$)
- $\cos 2\alpha$ จะหาได้อย่าง

  (แนวตอบ $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
  $= 1 - 2\sin^2\alpha$
  $= 2\cos^2\alpha - 1$)
- $\tan 2\alpha$ จะหาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$)
- $\sin(3\alpha)$ หาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$)

- $\cos 3\alpha$ จะหาได้อย่าง

  (แนวตอบ $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$)
- $\tan 3\alpha$ จะหาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\tan(3\alpha) = \frac{3\tan\alpha+\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$)
- $\sin\frac{\alpha}{2}$ จะหาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$)
- $\cos\frac{\alpha}{2}$ จะหาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}}$)

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้			
1) ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่า สามเท่า และครึ่งเท่าของจำนวนจริง	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 1.8 - ตรวจ Exercise 1.8	- แบบฝึกทักษะ 1.8 - Exercise 1.8	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอผลงาน	- แบบประเมินการนำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

18) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

19) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ขันตรีโกณมิติ

แหล่งการเรียนรู้

1) ห้องสมุด
2) แหล่งชุมชน
3) อินเทอร์เน็ต

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ **จำนวน 40 ชั่วโมง**

เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ **จำนวน 3 ชั่วโมง**

ผู้สอน นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล **โรงเรียนสตรีศึกษา**

ผลการเรียนรู้

25) เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและ นำไปใช้ในการแก้ปัญหา

26) แก้สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

27) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

33) หาความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิได้ (K)

34) ใช้ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิได้แก้ปัญหาได้ (P)

35) มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่า สามเท่า และครึ่งเท่าของจำนวนจริงหรือมุม

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=-2\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการสำรวจ ค้นหา 2) ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้

📖 **แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching**

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

ขั้นทบทวนความรู้เดิมเชื่องโยงความรู้ใหม่

ครูทบทวนความรู้เดิมเรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกของจำนวนจริงหรือมุม ด้วยการถามคำถามดังนี้

- $\sin(A+B)$ หาได้อย่างไร
  (แนวตอบ $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$)
- $\sin(A-B)$ หาได้อย่างไร
  (แนวตอบ $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$)
- $\cos(\alpha-\beta)$ หาได้อย่างไร
  (แนวตอบ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\ \cos\ \beta + \sin\alpha\sin\beta$)
- $\cos(\alpha+\beta)$ หาได้อย่างไร
  (แนวตอบ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$)

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

1. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียน หน้า 81 ดังนี้

- ให้นักเรียนแต่กลุ่มร่วมกันตอบคำถามในกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียน หน้า 81
- ให้นักเรียนในกลุ่มแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อนสมาชิกในกลุ่มจนเป็นที่เข้าในร่วมกัน
- ครูสุ่มนักเรียนออกมาตอบคำถามของกิจกรรมคณิตศาสตร์ โดยมีครูและเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความถูกต้อง

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

1. จากการทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียน หน้า 81 ครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\sin(\alpha+\beta)$ หาได้อย่างไร
  (แนวตอบ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$)
- $\sin(\alpha-\beta)$ หาได้อย่างไร
  (แนวตอบ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$)
- $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$ เท่ากับเท่าไร
  (แนวตอบ $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$)
- $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$ เท่ากับเท่าไร
  (แนวตอบ $2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$)

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นสอน

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

2. ครูให้นักเรียนกลุ่มเดิมหาค่าของ $2\cos\alpha\cos\beta$ และ $2\sin\alpha\sin\beta$ โดยให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มร่วมกันแลกเปลี่ยนความรู้จนเป็นที่เข้าใจร่วมกัน จากนั้นครูสุ่มนักเรียนให้มานำเสนอคำตอบ แต่ในการนำเสนอนี้ครูจะยังไม่บอกคำตอบที่ถูกต้องให้นักเรียนทราบ แต่ครูจะถามคำถามกับนักเรียน ดังนี้

- $\cos(\alpha-\beta)$ หาได้อย่างไร
  (แนวตอบ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\ \beta+\sin\alpha\sin\beta$)

- $\cos(\alpha+\beta)$ หาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$)

- $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$ เท่ากับเท่าไร

  (แนวตอบ $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$)

- $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$ เท่ากับเท่าไร

  (แนวตอบ $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=-2\cos\alpha\sin\beta$)

3. จากนั้นครูเขียนความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ อีก ดังนี้

   โดยครูกำหนด $x+y=\alpha$ .....(1)

   $x-y=\beta$ .....(2)

   และถามคำถามนักเรียน ดังนี้

   - คำตอบของระบบสมการข้างต้น เท่ากับเท่าไร

     (แนวตอบ $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ และ $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$)

   - หาคำตอบของระบบสมการมาได้อย่างไร

     (**แนวตอบ** นักเรียนสามารถตอบได้หลากหลายขึ้นกับความถนัดในการแก้ระบบสมการของนักเรียน โดยนักเรียนอาจตอบว่า ใช้สมบัติการเท่ากันและแก้สมการหาค่า x แล้วนำค่า x ที่ได้ไปแทนค่าเพื่อหาค่า y ต่อไป)

   เมื่อนักเรียนตอบคำถามได้เช่นนี้ ครูเขียนความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ อีก ดังนี้

   $$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$$

   และครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

   - แทนค่า x และ y ในความสัมพันธ์ข้างต้นจะได้ผลลัพธ์เป็นอย่างไร

     (แนวตอบ $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ ซึ่งจะได้ว่า $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$)

   - ถ้าแทนค่า x และ y ในความสัมพันธ์ $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$ จะได้ผลลัพธ์เป็นอย่างไร

     (แนวตอบ $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ ซึ่งจะได้ว่า $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$)

- ถ้าแทนค่า x และ y ในความสัมพันธ์ $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$ จะได้ผลลัพธ์เป็นอย่างไร

(แนวตอบ

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

ซึ่งจะได้ว่า $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$)

- ถ้าแทนค่า x และ y ในความสัมพันธ์ $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$ จะได้ผลลัพธ์เป็นอย่างไร

(แนวตอบ

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

ซึ่งจะได้ว่า $\sin\alpha-\sin\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$)

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

4. ครูให้นักเรียนจับคู่และร่วมกันศึกษาตัวอย่างที่ 46-48 ในหนังสือเรียน หน้า 83-84 จากนั้นแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเองจนเป็นที่เข้าใจร่วมกัน จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $2\cos 55^\circ\cos 5^\circ$ หาได้อย่างไร

(แนวตอบ $2\cos 55^\circ\cos 5^\circ=\cos(55^\circ+5^\circ)+\cos(55^\circ-5^\circ)$

ซึ่งจะได้ว่า $2\cos 55^\circ\cos 5^\circ=\cos 60^\circ+\cos 50^\circ$)

- $\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\theta\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\theta\right)$ เท่ากับเท่าไร

(แนวตอบ

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\theta\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\theta\right)=2\sin\left[\frac{\left(\frac{5\pi}{6}-\theta\right)+\left(\frac{5\pi}{6}+\theta\right)}{2}\right]\cos\left[\frac{\left(\frac{5\pi}{6}-\theta\right)-\left(\frac{5\pi}{6}+\theta\right)}{2}\right]$$

ซึ่งจะได้ว่า $\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\theta\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\theta\right)=2\sin\frac{5\pi}{6}\cos(-\theta)=\cos\theta$)

- $\sin 40^\circ+\cos 10^\circ$ หาได้อย่างไร

(แนวตอบ

$$\sin 40° + \cos 10° = \sin 40° + \sin 80° = 2\sin\frac{40°+80°}{2}\cos\frac{40°-80°}{2}$$

ซึ่งจะได้ว่า $\sin 40° + \cos 10° = 2\sin 60°\cos(-20°)$)

5. จากตัวอย่างที่ 48 ในหนังสือเรียน หน้า 84 ครูอธิบายกรอบ “แนะแนวคิด” ให้นักเรียนฟังว่า $\cos 10° = \sin 80°$ และ $\sin 70° = \cos 20°$ นั้นเป็น co-function ตรีโกณมิติ และ $\cos(-\theta) = \cos\theta$ นั้นมาจากบทพิสูจน์ในหนังสือ หน้า 17

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

6. จากนั้นครูให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ท้ายตัวอย่างที่ 46-48 ในหนังสือเรียน หน้า 83-84 เมื่อทำเสร็จแล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

7. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.9 ข้อ 1.-6. ในหนังสือเรียน หน้า 85 เป็นการบ้าน

ขั้นลงมือทำ (Doing)

8. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วให้ทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ดังนี้

- ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.9 ข้อ 7. และข้อ 8. ในหนังสือเรียน หน้า 85
- ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจร่วมกัน หลังจากนั้นครูสุ่มนักเรียนในแต่ละกลุ่มออกมาเฉลยคำตอบ อย่างละเอียด โดยครูและเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความถูกต้อง

ขั้นสรุป

ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รอบยอดของนักเรียน ดังนี้

- ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติมีอะไรบ้าง

(แนวตอบ $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = -2\cos\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\sin\alpha - \sin\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$)

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 1.9 - ตรวจ Exercise 1.9	- แบบฝึกทักษะ 1.9 - Exercise 1.9	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอผลงาน	- แบบประเมินการนำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

20) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

21) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แหล่งการเรียนรู้

1) ห้องสมุด
2) แหล่งชุมชน
3) อินเทอร์เน็ต

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ **จำนวน 40 ชั่วโมง**

เรื่อง ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ **จำนวน 4 ชั่วโมง**

ผู้สอน นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล **โรงเรียนสตรีศึกษา**

ผลการเรียนรู้

28) เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและ นำไปใช้ในการแก้ปัญหา

29) แก้สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

30) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

36) คำนวณหาตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้ (K)

37) เขียนขั้นตอนแสดงวิธีการหาตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ พร้อมให้เหตุผลประกอบได้อย่างสมเหตุสมผล (P)

38) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

ฟังก์ชัน arcsine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ x = sin y และ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

ฟังก์ชัน arccosine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ x = cos y และ $0 \leq y \leq \pi$

ฟังก์ชัน arctangent คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ x = tan y และ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร	1. มีวินัย
2. ความสามารถในการคิด	2. ใฝ่เรียนรู้

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1) ทักษะการสำรวจ ค้นหา 2) ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้

📖 **แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : นิรนัย (Deductive Method)**

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

ขั้นกำหนดขอบเขตของปัญหา

1. ครูทบทวนความรู้เดิมเรื่องฟังก์ชันผกผัน โดยการถามคำถามนักเรียน ดังนี้
   - ตามความเข้าใจของนักเรียนฟังก์ชันผกผันเป็นอย่างไร

     (**แนวตอบ** นักเรียนสามารถตอบหลากหลายขึ้นอยู่กับความเข้าใจของนักเรียน)
2. ครูถามคำถามเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน ดังนี้
   - ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ หาได้หรือไม่

     (**แนวตอบ** นักเรียนตอบได้หลากหลาย เพราะเป็นเพียงคำถามจุดประเด็นให้นักเรียนสนใจ)

ขั้นสอน

ขั้นแสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

1. ครูอธิบายกับนักเรียนว่าการหาตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติทำได้โดยการสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของฟังก์ชัน แต่เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และตัวผกผันของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งเท่านั้นที่เป็นฟังก์ชัน ดังนั้น ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติจึงไม่เป็นฟังก์ชัน จากนั้นครูถามคำถามกระตุ้นให้นักเรียนคิดต่อว่าจะทำอย่างไรให้ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชัน

   (**แนวตอบ** กำหนดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติ)
2. ครูเขียนกราฟของ y = sin x บนกระดานหน้าชั้นเรียน จากนั้นครูอธิบายบทนิยามของฟังก์ชัน arcsine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ x = sin y และ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ และครูอธิบายความรู้

ในกรอบ “คณิตน่ารู้” ให้นักเรียนฟังว่า “y = arcsine x จะเขียนสั้นๆ ว่า y = arcsin x”

3. หลังจากนั้นครูเขียนกราฟของ y = arcsin x ให้นักเรียนดูอย่างละเอียดบนกระดานหน้าชั้นเรียน บนแกนของกราฟ y = sin x และให้นักเรียนสังเกตว่า โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน arcsine คืออะไร จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- โดเมนของฟังก์ชัน arcsine คืออะไร

  (**แนวตอบ** โดเมนของฟังก์ชัน arcsine คือ [-1, 1])

- เรนจ์ของฟังก์ชัน arcsine คืออะไร

  (**แนวตอบ** เรนจ์ของฟังก์ชัน arcsine คือ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$)

ขั้นใช้ทฤษฎี หลักการ

4. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 49 ในหนังสือเรียน หน้า 87-88 หลังจากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- sin อะไรที่มีมุมอยู่ระหว่าง $-\frac{\pi}{2}$ ถึง $\frac{\pi}{2}$ แล้วมีค่า $\frac{\sqrt{2}}{2}$

  (**แนวตอบ** $\sin\frac{\pi}{4}$)

- ดังนั้น $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ เท่ากับเท่าไร

  (**แนวตอบ** $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$)

- sin อะไรที่มีมุมอยู่ระหว่าง $-\frac{\pi}{2}$ ถึง $\frac{\pi}{2}$ แล้วมีค่า $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

  (**แนวตอบ** $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$)

- ดังนั้น $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ เท่ากับเท่าไร

  (**แนวตอบ** $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$)

5. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 88 เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้ว ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นสอน

ขั้นแสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

6. ครูเขียนกราฟของ y = cos x บนกระดานหน้าชั้นเรียน จากนั้นครูอธิบายบทนิยามของฟังก์ชัน arccosine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ x = cos y และ $0 \leq y \leq \pi$ จากนั้นครูอธิบายความรู้ในกรอบ “คณิตน่ารู้” ให้นักเรียนฟังว่า “y = arccosine x จะเขียนสั้นๆ ว่า y = arccos x”

7. หลังจากนั้นครูเขียนกราฟของ y = arccos x ให้นักเรียนดูอย่างละเอียดบนกระดานหน้าชั้นเรียนบนแกนของกราฟ y = cos x และให้นักเรียนสังเกตว่า โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน arccosine คืออะไร จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- โดเมนของฟังก์ชัน arccos คืออะไร

  (**แนวตอบ** โดเมนของฟังก์ชัน arccos คือ [-1, 1])

- เรนจ์ของฟังก์ชัน arccosine คืออะไร

  (**แนวตอบ** เรนจ์ของฟังก์ชัน arccosine คือ $[0,\ \pi]$)

ขั้นใช้ทฤษฎี หลักการ

8. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 50 ในหนังสือเรียน หน้า 88-89 หลังจากนั้นครูถามคำถามนักเรียนดังนี้

- cos อะไรที่มีมุมอยู่ระหว่าง 0 ถึง π แล้วมีค่า 1

  (**แนวตอบ** $\cos 0$)

- ดังนั้น $\arccos 1$ เท่ากับเท่าไร

  (**แนวตอบ** $\arccos 1 = 0$)

- cos อะไรที่มีมุมอยู่ระหว่าง 0 ถึง π แล้วมีค่า $-\frac{1}{2}$

  (**แนวตอบ** $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$)

- ดังนั้น $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ เท่ากับเท่าไร

  (**แนวตอบ** $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$)

9. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 90 เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้ว ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นสอน

ขั้นแสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

10. ครูเขียนกราฟของ y = tan x บนกระดานหน้าชั้นเรียน จากนั้นครูอธิบายบทนิยามของฟังก์ชัน arctangent คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ x = tan y และ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ จากนั้นครูอธิบายความรู้ในกรอบ “คณิตน่ารู้” ให้นักเรียนฟังว่า “y = arctangent x จะเขียนสั้นๆ ว่า y = arctan x”

11. หลังจากนั้นครูเขียนกราฟของฟั y = arctan x ให้นักเรียนดูอย่างละเอียดบนกระดานหน้าชั้นเรียนบนแกนของกราฟ y = tan x และให้นักเรียนสังเกตว่า โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน arctangent คืออะไร จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- โดเมนของฟังก์ชัน arctangent คืออะไร

  (**แนวตอบ** โดเมนของฟังก์ชัน arctangent คือ $(-\infty, \infty)$)
- เรนจ์ของฟังก์ชัน arctangent คืออะไร

  (**แนวตอบ** เรนจ์ของฟังก์ชัน arctangent คือ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$)

ขั้นใช้ทฤษฎี หลักการ

12. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 51 ในหนังสือเรียน หน้า 91 หลังจากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- tan มุมเท่าไรมีค่า $\frac{\sqrt{3}}{3}$

  (**แนวตอบ** $\tan\frac{\pi}{6}$)
- ดังนั้น $\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}$ เท่ากับเท่าไร

  (**แนวตอบ** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$)
- tan มุมเท่าไรมีค่า -1

  (**แนวตอบ** $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$)
- ดังนั้น $\arctan(-1)$ เท่ากับเท่าไร

  (**แนวตอบ** $\arccos(-1) = -\frac{\pi}{4}$)

13. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 92 เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้ว ครูและนักเรียน

ร่วมกันเฉลยคำตอบ

ชั่วโมงที่ 4

ขั้นสอน

ขั้นแสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

14. ครูให้นักเรียนศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างโดเมนและเรนจ์ที่ทำให้แต่ละฟังก์ชันมีฟังก์ชันผกผันได้ในหนังสือเรียน หน้า 92 และศึกษากราฟของฟังก์ชัน sine, cosine, tangent และกราฟของฟังก์ชัน arcsine, arccosine และ arctangent ในหนังสือเรียน หน้า 92-93

ขั้นใช้ทฤษฎี หลักการ

15. ครูให้นักเรียนจับคู่และร่วมกันศึกษาตัวอย่างที่ 52-56 ในหนังสือเรียน หน้า 93-95 เมื่อนักเรียนแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเองจนเป็นที่เข้าใจร่วมกันแล้วครูสุ่มนักเรียน 4 คน ออกมาแสดงทำอย่างละเอียด พร้อมกับถามคำถามนักเรียนในห้องให้ร่วมกันตรวจสอบพร้อมแสดงแนวคิดที่ต่างหรือวิธีการที่หลากหลาย

16. ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ท้ายตัวอย่างที่ 52-56 ในหนังสือเรียน หน้า 93-96 เมื่อนักเรียนแต่ละคนทำเสร็จ ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบโดยละเอียด

ขั้นสรุป

ขั้นตรวจสอบและสรุป

17. ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- ฟังก์ชัน arcsine คืออะไร

  (**แนวตอบ** เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \sin y$ และ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$)

- โดเมนของฟังก์ชัน arcsine คืออะไร

  (**แนวตอบ** โดเมนของฟังก์ชัน arcsine คือ [-1, 1])

- เรนจ์ของฟังก์ชัน arcsine คืออะไร

  (**แนวตอบ** เรนจ์ของฟังก์ชัน arcsine คือ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$)

- ฟังก์ชัน arccosine คืออะไร

(**แนวตอบ** เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ x = cos y และ $0 \leq y \leq \pi$)

- โดเมนของฟังก์ชัน arccos คืออะไร

  (**แนวตอบ** โดเมนของฟังก์ชัน arccos คือ [-1, 1])

- เรนจ์ของฟังก์ชัน arccosine คืออะไร

  (**แนวตอบ** เรนจ์ของฟังก์ชัน arccosine คือ $[0, \pi]$)

- ฟังก์ชัน arctangent คืออะไร

  (**แนวตอบ** เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ x = tan y และ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$)

- โดเมนของฟังก์ชัน arctangent คืออะไร

  (**แนวตอบ** โดเมนของฟังก์ชัน arctangent คือ $(-\infty, \infty)$)

- เรนจ์ของฟังก์ชัน arctangent คืออะไร

  (**แนวตอบ** เรนจ์ของฟังก์ชัน arctangent คือ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$)

ขั้นฝึกปฏิบัติ

18. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วให้ทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ดังนี้

- ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.10 ในหนังสือเรียน หน้า 96
- ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจร่วมกัน หลังจากนั้นครูลุ่มนักเรียนในแต่ละกลุ่มออกมาเฉลยคำตอบ อย่างละเอียด โดยครูและเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความถูกต้อง

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้			
1) ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 1.10 - ตรวจ Exercise 1.10	- แบบฝึกทักษะ 1.10 - Exercise 1.10	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอผลงาน	- แบบประเมินการนำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

22) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

23) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แหล่งการเรียนรู้

1) ห้องสมุด
2) แหล่งชุมชน
3) อินเทอร์เน็ต

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ **จำนวน 40 ชั่วโมง**

เรื่อง เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ และสมการตรีโกณมิติ **จำนวน 3 ชั่วโมง**

ผู้สอน นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล **โรงเรียนสตรีศึกษา**

ผลการเรียนรู้

31) เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและ นำไปใช้ในการแก้ปัญหา

32) แก้สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

33) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

39) แก้สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหาได้ (K)

40) ใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติในการแก้สมการตรีโกณมิติได้อย่างเหมาะสม (K)

41) ให้เหตุผลประกอบการพิสูจน์สมการตรีโกณมิติที่กำหนดให้ด้อย่างสมเหตุสมผล (P)

42) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

สมการที่มีฟังก์ชันตรีโกณมิติปรากฏอยู่ เรียกว่า **สมการตรีโกณมิติ**

สมการ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ เป็นจริงสำหรับทุก θ เรียกสมการตรีโกณมิติที่เป็นจริงสำหรับทุกค่าของ θ ว่า **เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ**

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1) ทักษะการสำรวจ ค้นหา 2) ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้

📖 **แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching**

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

ขั้นทบทวนความรู้เดิมเชื่องโยงความรู้ใหม่

3. ครูกล่าวกับนักเรียนว่า สำหรับหัวข้อนี้ นักเรียนจะได้นำความสัมพันธ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติมาใช้เพื่อแสดงความเท่ากันทุกประการระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติที่แตกต่างกันตั้งแต่ 2 ฟังก์ชันขึ้นไป ซึ่งจะเรียกว่า “การพิสูจน์เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ”

4. ครูทบทวนความรู้เดิมเรื่องเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ โดยการถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- ตามความเข้าใจของนักเรียน “เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ” คืออะไร

(**แนวตอบ** นักเรียนสามารถตอบหลากหลายขึ้นอยู่กับความเข้าใจพื้นฐานของนักเรียน)

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

1. ครูเขียนสมการ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ เป็นจริงสำหรับทุก θ เรียกสมการตรีโกณมิติที่เป็นจริงสำหรับทุกค่าของ θ ว่า เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ จากนั้นครูกำหนด $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ให้เป็นสมการที่ 1 จะได้ลักษณะ ดังนี้

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad \text{.....(1)}$$

ครูถามคำถามนักเรียนว่า ถ้าครูนำ $\cos^2\theta$ หารสมการ (1) จะได้ผลลัพธ์เช่นไร ครูให้นักเรียนคิดก่อนครูจะเฉลยบทกระดานหน้าชั้นเรียน ดังนี้

$(1) \div \cos^2\theta$ จะได้ $\quad \dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad \text{.....(2)}$$

จากนั้นครูถามคำถามนักเรียนต่อไปอีกว่า ถ้าครูนำ $\sin^2\theta$ หารสมการ (1) จะได้ผลลัพธ์เช่นไร ครูให้นักเรียนคิดก่อนครูจะเฉลยบทกระดานหน้าชั้นเรียน ดังนี้

$(1) \div \sin^2\theta$ จะได้ $\quad \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + \dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$

$$\cot^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta \quad \text{.....(2)}$$

2. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 57-60 ในหนังสือเรียน หน้า 97-99 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง จนเป็นที่เข้าใจร่วมกัน

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

3. เมื่อนักเรียนแต่ละคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 57-60 ในหนังสือเรียน หน้า 97-99 เสร็จ ครูถามคำถามเพื่อให้นักเรียนแสดงความเข้าใจจากตัวอย่างที่ศึกษา โดยครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- จากตัวอย่างที่ 57 ทำไมถึงแทนค่า $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

  (**แนวตอบ** นำ $\cos^2\theta$ หารตลอดสมการ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ จะได้ $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$)

- จากตัวอย่างที่ 58 ทำไมถึงแทนค่า $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$

  (**แนวตอบ** นำ $\cos^2\theta$ ลบตลอดสมการ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ จะได้ $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$)

- จากตัวอย่างที่ 59 ใช้ความสัมพันธ์ใดของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

  (**แนวตอบ** ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่ว่า $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$)

- จากตัวอย่างที่ 60 ใช้ความสัมพันธ์ใดของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

  (**แนวตอบ** ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่ว่า $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$)

4. หลังจากนั้นครูให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ท้ายตัวอย่างที่ 57-60 ในหนังสือเรียน หน้า 97-99 เมื่อนักเรียนทุกคนทำเสร็จ ครูสุ่มนักเรียนออกมาเฉลยคำตอบ โดยให้นักเรียนแสดงวิธีทำอย่างละเอียด โดยครูและเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความถูกต้อง

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

5. ครูอธิบายนักเรียนว่า “ฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยทั่วไปไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทำให้ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ อาจจะมีค่าซ้ำกันได้ ดังนั้น ในการหาคำตอบของสมการตรีโกณมิติ ถ้าโจทย์ไม่ได้กำหนดให้คำตอบอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่ง คำตอบจะอยู่ในรูปของค่าทั่วไป”

6. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 61-64 ในหนังสือเรียน หน้า 100-101 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง จนเป็นที่เข้าใจร่วมกัน

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

7. เมื่อนักเรียนแต่ละคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 61-64 ในหนังสือเรียน หน้า 100-101 เสร็จ ครูถามคำถามเพื่อให้นักเรียนแสดงความเข้าใจจากตัวอย่างที่ศึกษา โดยครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- จากตัวอย่างที่ 61 cosine มุมเท่าไรในจตุภาคที่ 1 ที่เท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

  (**แนวตอบ** $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ดังนั้น เซตคำตอบ คือ $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$)

- จากตัวอย่างที่ 62 tangent มุมเท่าไรในวงกลมหนึ่งหน่วย ที่เท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

  (**แนวตอบ** $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ คือ $\frac{\pi}{6}$ และ $\frac{7\pi}{6}$ ดังนั้น เซตคำตอบ คือ $\left\{\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right\}$)

- จากตัวอย่างที่ 62 tangent มุมเท่าไร ที่เท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

  (**แนวตอบ** $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ คือ $\frac{\pi}{6}$ และ $\frac{7\pi}{6}$ ดังนั้น ค่าทั่วไปของ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $2n\pi+\frac{\pi}{6}$ และ $2n\pi+\frac{7\pi}{6}$ เมื่อ $n\in I$)

- จากตัวอย่างที่ 63 สมการ $\cos 2\theta+3\sin\theta=2$ จะแก้สมการอย่างไร

  (**แนวตอบ** เปลี่ยน $\cos 2\theta$ เป็น $1-2\sin^2\theta$ จะได้ $(1-2\sin^2\theta)+3\sin\theta=2$ จากนั้นแก้สมการ $2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0$ โดยการแยกตัวประกอบ)

- จากตัวอย่างที่ 64 สมการ $2\cos^2 x+2\cos 2x=1$ จะแก้สมการอย่างไร

  (**แนวตอบ** เปลี่ยน $\cos 2x$ เป็น $2\cos^2 x-1$ จะได้ $2\cos^2 x+2(2\cos^2 x-1)=1$ จากนั้นแก้สมการ $6\cos^2 x=3$)

8. หลังจากนั้นครูให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ท้ายตัวอย่างที่ 61-64 ในหนังสือเรียน

หน้า 100-101 เมื่อนักเรียนทุกคนทำเสร็จ ครูสุ่มนักเรียนออกมาเฉลยคำตอบ โดยให้นักเรียนแสดงวิธีทำอย่างละเอียด โดยครูและเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความถูกต้อง

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นสอน

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

9. ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำแบบฝึกทักษะ 1.11 ข้อ 1.-4. ในหนังสือเรียน หน้า 102 เมื่อนักเรียนแต่ละคนทำเสร็จครูสุ่มนักเรียนออกมาแสดงวิธีทำธีละคนไม่ซ้ำกัน โดยครูและเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความถูกต้อง

ขั้นลงมือทำ (Doing)

10. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วให้ทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ดังนี้

- ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.11 ข้อ 5. และข้อ 6. ในหนังสือเรียน หน้า 102
- ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจร่วมกัน หลังจากนั้นครูสุ่มนักเรียนในแต่ละกลุ่มออกมาเฉลยคำตอบ อย่างละเอียด โดยครูและเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความถูกต้อง

ขั้นสรุป

ขั้นตรวจสอบและสรุป

19. ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ คืออะไร

  (**แนวตอบ** สมการ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ เป็นจริงสำหรับทุก θ)

- โดเมนของฟังก์ชัน arcsine คืออะไร

  (**แนวตอบ** โดเมนของฟังก์ชัน arcsine คือ [-1, 1])

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้			
1) เอกลักษณ์ตรีโกณมิติและสมการตรีโกณมิติ	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 1.11 - ตรวจ Exercise 1.11	- แบบฝึกทักษะ 1.11 - Exercise 1.11	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอผลงาน	- แบบประเมินการนำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

24) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

25) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แหล่งการเรียนรู้

1) ห้องสมุด
2) แหล่งชุมชน
3) อินเทอร์เน็ต

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ **จำนวน 40 ชั่วโมง**

เรื่อง กฎของไซน์และโคไซน์ **จำนวน 3 ชั่วโมง**

ผู้สอน นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล **โรงเรียนสตรีศึกษา**

ผลการเรียนรู้

34) เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและ นำไปใช้ในการแก้ปัญหา

35) แก้สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

36) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

43) หาความสัมพันธ์ของกฎของโคไซน์และกฎของไซน์ได้ (K)

44) ให้เหตุผลประกอบการพิสูจน์กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ได้อย่างสมเหตุสมผล (P)

45) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

กฎของโคไซน์และกฎของไซน์

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

กฎของไซน์ คือ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ

ถ้า a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ จะได้ว่า

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

กฎของโคไซน์ คือ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ

ถ้า a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ จะได้ว่า

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการสำรวจ ค้นหา 2) ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้

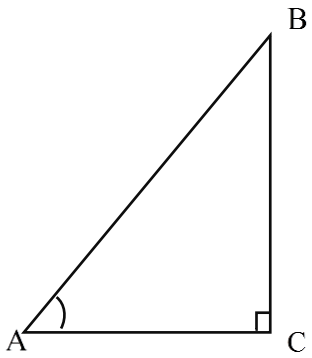
📖 **แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching**

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

ขั้นทบทวนความรู้เดิมเชื่องโยงความรู้ใหม่

5. ครูเขียนรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม **C** เป็นมุมฉาก บนกระดาน ดังนี้



6. จากนั้นครูถามคำถามนักเรียนว่า อัตราส่วนตรีโกณมิติจากรูปสามเหลี่ยม ABC มีอะไรบ้าง

(แนวตอบ จากรูปสามเหลี่ยม **ABC** ที่มีมุม **C** เป็นมุมฉาก จะได้ว่า

1. $\sin A = \frac{BC}{AB}$ 4. $\operatorname{cosec} A = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sin A}$

2. $\cos A = \frac{AC}{AB}$ 5. $\sec A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\cos A}$

3. $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sin A}{\cos A}$ 6. $\cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\tan A}$)

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

11. ครูเขียนรูปสามเหลี่ยมเช่นเดียวกับรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม ในหนังสือเรียน หน้า 103 จากนั้นครูให้นักเรียนพิจารณาภาพที่ครูเขียนบนกระดานที่มีด้าน AB เป็นฐาน จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ADC จะได้อัตราส่วน sin A คือเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\sin A = \frac{CD}{b}$)

- ความยาวของด้าน CD เท่ากับเท่าใด

  (**แนวตอบ** CD = b sin A)

- พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC จะหาได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $ABC = \frac{1}{2} \times AB \times CD$

  $= \frac{1}{2} \times (c) \times (b\sin A)$

  $= \frac{1}{2} bc\sin A$)

12. ครูจึงสรุปว่า พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $ABC = \frac{1}{2} bc\sin A$ .....(1)

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

13. ครูให้นักเรียนพิจารณาภาพที่ครูเขียนบนกระดานที่มีด้าน BC เป็นฐาน จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก AEB จะได้อัตราส่วน sin B คือเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\sin B = \frac{AE}{c}$)

- ความยาวของด้าน CD เท่ากับเท่าใด

  (**แนวตอบ** AE = c sin B)

- พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC จะหาได้อย่างไร

(**แนวตอบ** พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $\text{ABC} = \frac{1}{2} \times \text{BC} \times \text{AE}$

$= \frac{1}{2} \times (\text{a}) \times (\text{csinA})$

$= \frac{1}{2}\text{acsinA})$

14. ครูจึงสรุปว่า พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $\text{ABC} = \frac{1}{2}\text{acsinA}$ .....(2)

ขั้นลงมือทำ (Doing)

15. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วให้ทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ดังนี้

- ให้นักเรียนพิจารณาภาพที่ครูเขียนบนกระดานที่มีด้าน CA เป็นฐาน จากนั้นแต่ละกลุ่มร่วมกันแสดงการพิสูจน์การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีด้าน CA เป็นฐาน
- ให้นักเรียนทำกิจกรรม “Thinking Time” ในหนังสือเรียน หน้า 103 โดยแสดงการพิสูจน์รูปสามเหลี่ยมมุมป้านด้วย
- จากให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจร่วมกัน หลังจากนั้นครูลุ่มนักเรียนในแต่ละกลุ่มออกมาแสดงการพิสูจน์อย่างละเอียด โดยครูและเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความสมเหตุสมผล

16. เมื่อนักเรียนทำการแสดงการพิสูจน์จนครบแล้ว ครูจึงให้นักเรียนจับทุกสมการให้เท่ากันแล้วให้นักเรียนสังเกตให้เห็นความสัมพันธ์ $\frac{\sin \text{A}}{\text{a}} = \frac{\sin \text{B}}{\text{b}} = \frac{\sin \text{C}}{\text{c}}$ ครูจึงกล่าวว่าเราจะเรียกความสัมพันธ์นี้ ว่า “กฎของไซน์”

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

17. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 65-66 ในหนังสือเรียน หน้า 104-105 เมื่อนักเรียนศึกษาตัวอย่างเสร็จครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- จากตัวอย่างที่ 65 ใช้ความสัมพันธ์คู่ใดของกฎของไซน์ในการหาความยาวด้าน c

(**แนวตอบ** ใช้ความสัมพันธ์ของ $\frac{\sin \text{B}}{\text{b}} = \frac{\sin \text{C}}{\text{c}}$ ซึ่งจะได้ว่า $\frac{\sin 75^\circ}{4} = \frac{\sin 60^\circ}{\text{c}}$)

- จากตัวอย่างที่ 66 ใช้ความสัมพันธ์คู่ใดของกฎของไซน์ในการขนาดของมุม B

(**แนวตอบ** ใช้ความสัมพันธ์ของ $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ ซึ่งจะได้ว่า $\frac{\sin B^\circ}{6} = \frac{\sin 60^\circ}{10}$)

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 105-106 เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้ว ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

18. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาบทพิสูจน์กฎของโคไซน์ ในหนังสือเรียน หน้า 106 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเองจนเป็นที่เข้าใจร่วมกัน จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- การพิสูจน์กฎของโคไซน์ในหนังสือเรียน หน้า 106 พิสูจน์ได้อย่างไร

(**แนวตอบ** พิสูจน์โดยอาศัยทฤษฎีบทพีทาโกรัส)

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

19. ครูให้นักเรียนคู่เดิมช่วยกันพิสูจน์กฎของโคไซน์ที่ในหนังสือละการพิสูจน์ไว้ให้เสร็จ จากนั้นสุ่มนักเรียน 2 คน ออกมาแสดงการพิสูจน์หน้าชั้นเรียน โดยครูแล้วเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความสมเหตุสมผลของการพิสูจน์

ขั้นลงมือทำ (Doing)

20. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วให้ทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ดังนี้

- ให้นักเรียนทำกิจกรรม “Thinking Time” ในหนังสือเรียน หน้า 106 โดยให้แสดงการพิสูจน์กฎของโคไซน์ โดยใช้รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน
- จากให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจร่วมกัน หลังจากนั้นครูลุ่มนักเรียนในแต่ละกลุ่มออกมาแสดงการพิสูจน์อย่างละเอียด โดยครูและเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความสมเหตุสมผล

21. เมื่อนักเรียนทำการแสดงการพิสูจน์จนครบแล้ว ครูจึงกล่าวว่าเราจะเรียกความสัมพันธ์นี้ว่า “กฎของโคไซน์” ซึ่งก็คือ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ

ถ้า a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ จะได้ว่า

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

22. เมื่อนักเรียนแต่ละคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 67-68 ในหนังสือเรียน หน้า 107-108 เสร็จ ครูถามคำถามเพื่อให้นักเรียนแสดงความเข้าใจจากตัวอย่างที่ศึกษา โดยครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- จากตัวอย่างที่ 67 ใช้ความสัมพันธ์ใดของกฎของโคไซน์ในการหาความยาวด้าน a

(**แนวตอบ** ใช้ความสัมพันธ์ของ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

ซึ่งจะได้ว่า $a^2 = 6^2 + 10^2 - 2(6)(10)\cos 30°$)

- จากตัวอย่างที่ 68 ใช้ความสัมพันธ์ใดของกฎของโคไซน์ในการขนาดของมุม A

(**แนวตอบ** ใช้ความสัมพันธ์ของ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

ซึ่งจะได้ว่า $\left(\sqrt{10}\right)^2 = 2^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2(2)(\sqrt{2})\cos A$)

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

23. หลังจากนั้นครูให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ท้ายตัวอย่างที่ 67-68 ในหนังสือเรียน หน้า 107-108 เมื่อนักเรียนทุกคนทำเสร็จ ครูสุ่มนักเรียนออกมาเฉลยคำตอบ โดยให้นักเรียนแสดงวิธีทำอย่างละเอียด โดยครูและเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความถูกต้อง

24. ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำแบบฝึกทักษะ 1.12 ข้อ 1.-3. ในหนังสือเรียน หน้า 108-109 เมื่อนักเรียนแต่ละคนทำเสร็จครูสุ่มนักเรียนออกมาแสดงวิธีทำธีละคนไม่ซ้ำกัน โดยครูและเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความถูกต้อง

ขั้นลงมือทำ (Doing)

25. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วให้ทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ดังนี้

- ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.12 ข้อ 4.-8. ในหนังสือเรียน หน้า 108-109
- ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจร่วมกัน หลังจากนั้นครูลุ่มนักเรียนในแต่ละกลุ่มออกมาเฉลยคำตอบอย่างละเอียด โดยครูและเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความถูกต้อง

ขั้นสรุป

ขั้นตรวจสอบและสรุป

ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- กฎของไซน์มีความสัมพันธ์ว่าอย่างไร

(แนวตอบ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$)

- กฎของโคไซน์มีความสัมพันธ์ว่าอย่างไร

(แนวตอบ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$)

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้			
1) กฎของไซน์และโคไซน์	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 1.12 - ตรวจ Exercise 1.12	- แบบฝึกทักษะ 1.12 - Exercise 1.12	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอผลงาน	- แบบประเมินการนำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

26) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

27) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แหล่งการเรียนรู้

1) ห้องสมุด
2) แหล่งชุมชน
3) อินเทอร์เน็ต

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ **จำนวน 40 ชั่วโมง**

เรื่อง การหาระยะและความสูง **จำนวน 3 ชั่วโมง**

ผู้สอน นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล **โรงเรียนสตรีศึกษา**

ผลการเรียนรู้

37) เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและ นำไปใช้ในการแก้ปัญหา

38) แก้สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

39) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

46) ความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติไปแก้ปัญหาระยะและความสูงที่กำหนดให้ได้ (K)

47) เขียนขั้นตอนแสดงวิธีการแก้ปัญหาระยะและความสูงที่กำหนดให้ พร้อมให้เหตุผลประกอบได้อย่างสมเหตุสมผล (P)

48) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับระยะทางและความสูงโดยความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ มุมก้ม และมุมเงยมาช่วยในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับระยะทางและความสูง

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการสำรวจ ค้นหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
2) ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	

กิจกรรมการเรียนรู้

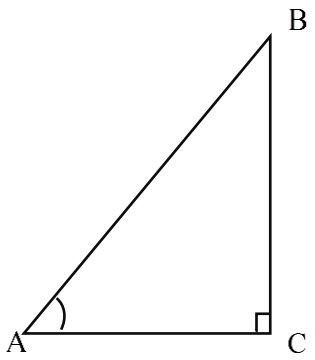
แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : นิรนัย (Deductive Method)

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

ขั้นกำหนดขอบเขตของปัญหา

7. ครูทบทวนความรู้เดิมเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยครูเขียนรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก บนกระดาน ดังนี้



8. จากนั้นครูถามคำถามนักเรียนว่า อัตราส่วนตรีโกณมิติจากรูปสามเหลี่ยม ABC มีอะไรบ้าง

(แนวตอบ จากรูปสามเหลี่ยม **ABC** ที่มีมุม **C** เป็นมุมฉาก จะได้ว่า

1. $\sin A = \frac{BC}{AB}$
2. $\cos A = \frac{AC}{AB}$
3. $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sin A}{\cos A}$
4. $\operatorname{cosec} A = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sin A}$
5. $\sec A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\cos A}$
6. $\cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\tan A}$)

9. ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- กฎของไซน์มีความสัมพันธ์ว่าอย่างไร

(**แนวตอบ** $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$)

- กฎของโคไซน์มีความสัมพันธ์ว่าอย่างไร

(**แนวตอบ** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$)

10. ครูถามคำถามเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน ดังนี้

- ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ หาได้หรือไม่

(**แนวตอบ** นักเรียนตอบได้หลากหลาย เพราะเป็นเพียงคำถามจุดประเด็นให้นักเรียนสนใจ)

11. ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับระยะทางและความสูงใช้ความรู้เรื่องใดบ้าง

(**แนวตอบ** นักเรียนสามารถตอบได้หลากหลายขึ้นกับความเข้าใจของนักเรียน)

ขั้นสอน

ขั้นแสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

1. ครูอธิบายนักเรียนว่าในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับระยะทางและความสูงโดยความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ มุมก้ม และมุมเงยมาช่วยในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับระยะทางและความสูง

ขั้นใช้ทฤษฎี หลักการ

2. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 69-71 ในหนังสือเรียน หน้า 110-113 หลังจากนั้นครูถามคำถามถามนักเรียน ดังนี้

- จากตัวอย่างที่ 69 ความสูงของตึกจะหาได้อย่างไร

(**แนวตอบ** ใช้กฎของไซน์และความสัมพันธ์ของมุมสองเท่า)

- จากตัวอย่างที่ 70 ระยะห่างของเรือสองลำจะหาได้อย่างไร

(**แนวตอบ** ใช้กฎของโคไซน์)

- จากตัวอย่างที่ 71 ระยะทางที่สุชาติอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นจะหาได้อย่างไร

(**แนวตอบ** ใช้กฎของไซน์และใช้กฎของโคไซน์)

3. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ตัวอย่างที่ 69-71 ในหนังสือเรียน หน้า 11-113 เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้ว ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นสอน

ขั้นใช้ทฤษฎี หลักการ

4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.13 ในหนังสือเรียน หน้า 113-114 เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้ว ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ โดยครูจะสุ่มนักเรียนออกมาแสดงวิธีทำอย่างละเอียด

5. หลังจากนักเรียนเรียนจบหน่วยการเรียนนี้แล้ว ครูให้ตรวจสอบตนเองโดยให้นักเรียนบอกสัญลักษณ์ที่ตรงกับระดับความสามารถของตนเอง

6. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วให้ทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ดังนี้

- ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันทำกิจกรรม “คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง” ในหนังสือเรียน หน้า 115
- ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจร่วมกัน หลังจากนั้นครูลุ่มนักเรียนในแต่ละกลุ่มออกมาเฉลยคำตอบอย่างละเอียด โดยครูและเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความถูกต้อง

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นสรุป

ขั้นตรวจสอบและสรุป

1. ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของ $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ หาได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** สามารถหาได้โดยการใช้วงกลมหนึ่งหน่วย หรือการพิจารณากราฟของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์)

- ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ หาได้อย่างไร

  (**แนวตอบ**

9) การหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ และ $\cos\ (\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

10) การหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\sin\ (\pi + \alpha) = -\sin\theta$ และ $\cos\ (\pi + \alpha) = -\cos\theta$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

11) การหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

$\sin\ (2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$ และ $\cos\ (2\pi - \alpha) = \cos\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

12) การหาค่า $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\theta > 2\pi$

$\theta = 2n\pi + \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $0 \leq \alpha < 2\pi$ จะได้ว่า

$$\sin\ (2n\pi + \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos\ (2n\pi + \alpha) = \cos\alpha)$$

- ในจตุภาคที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติใดมีค่าเป็นจำนวนบวก

  (**แนวตอบ** ฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกค่ามีค่าเป็นจำนวนบวก)

- ในจตุภาคที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติใดมีค่าเป็นจำนวนบวก

  (**แนวตอบ** ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคเซแคนต์จะเป็นจำนวนบวก)

- ในจตุภาคที่ 3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติใดมีค่าเป็นจำนวนบวก

  (**แนวตอบ** ฟังก์ชันแทนเจนต์และฟังก์ชันโคแทนเจนต์จะเป็นจำนวนบวก)

- ในจตุภาคที่ 4 ฟังก์ชันตรีโกณมิติใดมีค่าเป็นจำนวนบวก

  (**แนวตอบ** ฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันเซแคนต์จะเป็นจำนวนบวก)

- 360 องศา เท่ากับกี่เรเดียน

  (**แนวตอบ** 2π เรเดียน)

- 180 องศา เท่ากับกี่เรเดียน

  (**แนวตอบ** π เรเดียน)

- 1 องศา เท่ากับกี่เรเดียน

  (**แนวตอบ** $\frac{\pi}{180}$ เรเดียน)

- 1 เรเดียน เท่ากับกี่องศา

  (**แนวตอบ** $\frac{360}{2\pi}$ องศา หรือ $\frac{180}{\pi}$ องศา)

- $\cos$ ของจำนวนจริง θ หมายถึงอะไร

  (**แนวตอบ** $\cos$ ของมุม θ เรเดียน)

- $\sin$ ของจำนวนจริง θ หมายถึงอะไร

  (**แนวตอบ** $\sin$ ของมุม θ เรเดียน)

- $\sin\theta$ เป็นความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากด้านใดต่อด้านใด

  (**แนวตอบ** $\sin\theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$)

- $\cos\theta$ เป็นความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากด้านใดต่อด้านใด

  (**แนวตอบ** $\cos\theta = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$)

- $\tan\theta$ เป็นความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากด้านใดต่อด้านใด

  (**แนวตอบ** $\tan\theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}$)

- ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติใช้ประโยชน์อย่างไร

  (**แนวตอบ** ใช้หาค่าฟังก์ชันค่าตรีโกณมิติหรือตรวจสอบคำตอบค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ)

- ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ไม่สามารถเปิดตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติได้จะทำอย่างไร

  (**แนวตอบ** จะใช้ความรู้จากการเทียบบัญญัติไตรยางศ์ หรือสัดส่วน)

- ถ้าในตารางการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ไม่มีค่า $\cot\theta$, $\sec\theta$ และ $\operatorname{cosec}\theta$ จะหาค่าของฟังก์ชันดังกล่าวได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** $\cot\theta$ จะหาได้จากส่วนกลับของ $\tan\theta$, $\sec\theta$ จะหาได้จากส่วนกลับของ $\cos\theta$ และ $\operatorname{cosec}\theta$ จะหาได้จากส่วนกลับของ $\sin\theta$)

- โดเมนและเรนจ์ของกราฟ $y = \sin x$ คืออะไร

  (**แนวตอบ** โดเมน คือ เซตของจำนวนจริง และเรนจ์ คือ [-1,1])

- โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน $y = \cos x$ คืออะไร

  (**แนวตอบ** โดเมน คือ เซตของจำนวนจริง และเรนจ์ คือ [-1,1])

- เราจะหาค่าแอมพลิจูดของกราฟได้ กราฟดังกล่าวต้องมีค่าอะไรบ้าง และค่าแอมพลิจูดหาได้จากสูตรใด

(**แนวตอบ** ค่าสูงสุด และค่าต่ำสุด และหาค่าแอมพลิจูด $= \frac{\text{ค่าสูงสุด} - \text{ค่าต่ำสุด}}{2}$)

- $\cos(\alpha - \beta)$ หาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\ \cos\ \beta + \sin\alpha \sin\beta$)

- $\cos(\alpha + \beta)$ หาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$)

- $\sin(\alpha + \beta)$ หาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$)

- $\sin(\alpha - \ \beta)$ หาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\sin(\alpha - \ \beta) = \sin\alpha \cos\ \beta - \cos\alpha \sin\beta$)

- $\tan(\alpha + \ \beta)$ หาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\tan(\alpha + \ \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$)

- $\tan(\alpha - \ \beta)$ หาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\tan(\alpha - \ \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$)

- $\sin(2\alpha)$ หาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$)

- $\cos 2\alpha$ จะหาได้อย่าง

  (แนวตอบ $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
  $= 1 - 2\sin^2\alpha$
  $= 2\cos^2\alpha - 1$)

- $\tan 2\alpha$ จะหาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$)

- $\sin(3\alpha)$ หาได้อย่างไร

  (แนวตอบ $\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$)

- $\cos 3\alpha$ จะหาได้อย่าง

  (แนวตอบ $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$)

- $\tan 3\alpha$ จะหาได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** $\tan(3\alpha) = \frac{3\tan\alpha+\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$)

- $\sin\frac{\alpha}{2}$ จะหาได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$)

- $\cos\frac{\alpha}{2}$ จะหาได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}}$)

- ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติมีอะไรบ้าง

  (**แนวตอบ** $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

  $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$

  $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

  $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = -2\cos\alpha\sin\beta$

  $\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

  $\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

  $\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

  $\sin\alpha-\sin\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$)

- ฟังก์ชัน arcsine คืออะไร

  (**แนวตอบ** เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ x = sin y และ $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$)

- โดเมนของฟังก์ชัน arcsine คืออะไร

  (**แนวตอบ** โดเมนของฟังก์ชัน arcsine คือ [-1, 1])

- เรนจ์ของฟังก์ชัน arcsine คืออะไร

  (**แนวตอบ** เรนจ์ของฟังก์ชัน arcsine คือ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$)

- ฟังก์ชัน arccosine คืออะไร

  (**แนวตอบ** เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ x = cos y และ $0 \le y \le \pi$)

- โดเมนของฟังก์ชัน arccos คืออะไร

  (**แนวตอบ** โดเมนของฟังก์ชัน arccos คือ [-1, 1])

- เรนจ์ของฟังก์ชัน arccosine คืออะไร

  (**แนวตอบ** เรนจ์ของฟังก์ชัน arccosine คือ $[0,\ \pi]$)

- ฟังก์ชัน arctangent คืออะไร

  (**แนวตอบ** เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ x = tan y และ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$)

- โดเมนของฟังก์ชัน arctangent คืออะไร

  (**แนวตอบ** โดเมนของฟังก์ชัน arctangent คือ $(-\infty, \infty)$)

- เรนจ์ของฟังก์ชัน arctangent คืออะไร

  (**แนวตอบ** เรนจ์ของฟังก์ชัน arctangent คือ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$)

- เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ คืออะไร

  (**แนวตอบ** สมการ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ เป็นจริงสำหรับทุก θ)

- โดเมนของฟังก์ชัน arcsine คืออะไร

  (**แนวตอบ** โดเมนของฟังก์ชัน arcsine คือ [-1, 1])

- กฎของไซน์มีความสัมพันธ์ว่าอย่างไร

  (**แนวตอบ** $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$)

- กฎของโคไซน์มีความสัมพันธ์ว่าอย่างไร

  (**แนวตอบ**
  $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
  $$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
  $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$)

- ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับระยะทางและความสูงใช้ความรู้เรื่องใดบ้าง

  (**แนวตอบ** ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ มุมก้ม และมุมเงย มาช่วยในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับระยะทางและความสูง)

ขั้นฝึกปฏิบัติ

20. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ในหนังสือเรียน หน้า 120-121 เป็นการบ้าน

21. ครูให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
1. ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้			
1) การหาระยะและความสูง	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 1.13 - ตรวจ Exercise 1.13	- แบบฝึกทักษะ 1.13 - Exercise 1.13	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอผลงาน	- แบบประเมินการนำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
2. การประเมินหลังเรียน - แบบทดสอบหลังเรียน หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เวกเตอร์ในสามมิติ	- ตรวจแบบทดสอบหลังเรียน	- แบบทดสอบหลังเรียน	- ประเมินตามสภาพจริง

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

28) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

29) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แหล่งการเรียนรู้

1) ห้องสมุด
2) แหล่งชุมชน
3) อินเทอร์เน็ต

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 14

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง เมทริกซ์ **จำนวน 20 ชั่วโมง**

เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้น **จำนวน 2 ชั่วโมง**

ผู้สอน นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล **โรงเรียนสตรีศึกษา**

ผลการเรียนรู้

1) เข้าใจความหมาย หาผลลัพธ์ของการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์ และหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยนหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ n x n เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสาม

2) หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ 2 x 2

3) แก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผันและการดำเนินการตามแถว

จุดประสงค์การเรียนรู้

1) บอกความหมายของสมการเชิงเส้นได้ (K)

2) คำนวณหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้ (K)

3) เขียนขั้นตอนแสดงวิธีการแก้ระบบสมการได้ถูกต้อง โดยใช้วิธีการกำจัดตัวแปร (P)

4) มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

สมการเชิงเส้นและระบบสมการเชิงเส้น

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

กำหนดให้ $a_1, a_2, ..., a_n$ และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ $a_1, a_2, ..., a_n$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เรียกสมการ $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_n x_n = b$ ว่า สมการเชิงเส้น n ตัวแปร เมื่อ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นตัวแปร และระบบสมการเชิงเส้นที่มี $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ เป็นตัวแปร หมายถึง ชุดของสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นที่มี $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ เป็นตัวแปร จำนวน m สมการ โดยที่ $m \geq 2$ คำตอบของระบบสมการนี้ คือ จำนวน n จำนวน ที่นำไปแทนตัวแปร ในทุก ๆ สมการ ตามลำดับแล้วได้สมการที่เป็นจริงทั้งหมด

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการปรับโครงสร้าง 2) ทักษะการตีความ 3) ทักษะกระบวนการคิดแก้ปัญหา 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้

📖 **แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : นิรนัย (Deductive Method)**

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

กำหนดขอบเขตของปัญหา

1. ครูกระตุ้นความสนใจของนักเรียน โดยการให้นักเรียนดูภาพหน้าหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ในหนังสือเรียน หน้า 122 หลังจากนั้นให้นักเรียนร่วมกันตอบคำถามในหนังสือเรียน หน้า 122

หมายเหตุ* ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำถาม BIG QUESTION หลังเรียนหน่วยการเรียนรู้ที่ 2

2. ครูแนะนำบทเรียน พร้อมทั้งแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ของหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ให้นักเรียนทราบ หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน

3. ครูให้เรียนศึกษาควรรู้ก่อนเรียนในหนังสือเรียน หน้า 123

ขั้นสอน

แสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

1. ครูอธิบายให้นักเรียนฟังว่า สมการเชิงเส้น คือ สมการที่มีเลขชี้กำลังของตัวแปรทุกตัวเป็นหนึ่ง
2. ครูเขียนโจทย์ต่อไปนี้ บนกระดาน

1) $-8x + 4 = 6$ 2) $3x - 2y = 5$ 3) $2x - 3y + z = -5$

หลังจากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- สมการในข้อใดบ้างที่เป็นสมการเชิงเส้น

  (**แนวตอบ** สมการในข้อ 1), 2) และ 3) เป็นสมการเชิงเส้น เพราะตัวแปรทุกตัวของทุกสมการมีเลขชี้กำลังเป็นหนึ่ง)

- สมการในโจทย์ข้อ 1) มีกี่ตัวแปร

  (**แนวตอบ** มี 1 ตัวแปร คือตัวแปร x)

- สมการในโจทย์ข้อ 2) มีกี่ตัวแปร

  (**แนวตอบ** มี 2 ตัวแปร คือตัวแปร x และ y)

- สมการในโจทย์ข้อ 3) มีกี่ตัวแปร

  (**แนวตอบ** มี 3 ตัวแปร คือตัวแปร x, y และ z)

3. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปว่า สมการข้างต้น เราจะเรียกว่าสมการเชิงเส้น n ตัวแปร เช่น สมการข้อ 1) เราจะเรียกว่า สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว สมการข้อ 2) เราจะเรียกว่า สมการเชิงเส้นสองตัวแปร และในทำนองเดียวกันสมการโจทย์ข้อ 3) เราจะเรียกว่า สมการเชิงเส้นสามตัวแปร

4. ครูอธิบายระบบสมการเชิงเส้นให้นักเรียนว่า ระบบสมการเชิงเส้น ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นตั้งแต่สองสมการขึ้นไป พร้อมยกตัวอย่างว่า

   1) $x + 2y = 6$

      $3x - y = 2$

      โดยที่ x และ y เป็นตัวแปร จะเห็นว่าข้อ 1) มีสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 2 สมการ ดังนั้นจะเรียกว่า ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

   2) $2x - y + 4z = 0$

      $-x + 5y = 5z$

      $y + 7z = x$

      โดยที่ x, y และ z เป็นตัวแปร จะเห็นว่าข้อ 2) มีสมการเชิงเส้นสามตัวแปร 3 สมการ ดังนั้นจะเรียกว่า ระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปร

5. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปว่าระบบสมการเชิงเส้นที่มี $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ เป็นตัวแปร หมายถึง ชุดของ

สมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นที่มี $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ เป็นตัวแปร จำนวน m สมการ โดยที่ $m \geq 2$ คำตอบของระบบสมการนี้ คือ จำนวน n จำนวน ที่นำไปแทนตัวแปร ในทุก ๆ สมการ ตามลำดับแล้วได้สมการที่เป็นจริงทั้งหมด

6. ครูกล่าวว่า การหาค่าของตัวแปรจากการระบบสมการ เราจะเรียกว่าเป็นการแก้ระบบสมการ ซึ่งสามารถทำได้หลายวิธี เช่น การกำจัดตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง การใช้ความรู้เรื่องเมทริกซ์ การใช้ความรู้เรื่องดีเทอร์มิแนนต์

ใช้ทฤษฎี หลักการ

7. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 1 ในหนังสือเรียน หน้า 126 หลังจากนั้นครูนำตัวอย่างที่ 1 มาอธิบาย

หน้าชั้นเรียนซ้ำอีกครั้ง พร้อมทั้งอธิบาย การเขียนคำตอบของระบบสมการในกรอบ “คณิตน่ารู้” กับนักเรียนเพิ่มเติม แล้วให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 126 เมื่อเสร็จแล้วครูสุ่มนักเรียนออกมาเขียนแสดงวิธีทำหน้าชั้นเรียน โดยมีครูและเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความถูกต้อง

8. ครูให้นักเรียนแต่ละคนศึกษาตัวอย่างที่ 2 ในหนังสือเรียน หน้า 126-127 หลังจากนั้นครูให้นักเรียน

จับคู่แล้วทำกิจกรรม “ทนายช่างซัก (Rally Robin)” โดยให้นักเรียนแต่ละคู่ พูดคุย ซักถามกัน ในเรื่องการแก้ระบบสมการในตัวอย่างที่ 2 จากนั้นครูทำกิจกรรมร่วมกับนักเรียน โดยครูกับนักเรียนพูดคุย ซักถามกัน จนได้ข้อสรุปว่าระบบสมการในตัวอย่างนี้เป็นระบบสมการที่มีหลายคำตอบ

9. ครูให้นักเรียนแต่ละทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 127 หลังจากนั้นครูให้นักเรียนคู่เดิมทำกิจกรรม “ทนายช่างซัก (Rally Robin)” อีกครั้ง โดยให้นักเรียนพูดคุย ซักถามกัน ว่าคำตอบของระบบสมการของ “ลองทำดู”ตรงกันหรือไม่ พร้อมทั้งอธิบายซึ่งกันและกันจนมีความเข้าใจที่ตรงกัน

ชั่วโมงที่ 2

10. ครูเขียนโจทย์ของตัวอย่างที่ 3 บนกระดาน โดยครูจะยังไม่ให้นักเรียนเปิดหนังสือเรียน หลังจากนั้นครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4 คน แล้วกำหนดเลขประจำตัวนักเรียนเป็น 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ แล้วให้นักเรียนในกลุ่มทำกิจกรรม “รวมหัวคิด (Numbered Heads Together)” โดยให้นักเรียนในกลุ่มช่วยกันหาคำตอบของระบบสมการที่ครูเขียนบนกระดาน เมื่อนักเรียนในแต่ละกลุ่มทำเสร็จแล้ว ครูสุ่มเรียกเลขหมายใดก็ได้ให้ตอบคำถาม ซึ่งนักเรียนที่ถูกเรียกต้องสามารถตอบได้ พร้อมทั้งอธิบายได้ (เพราะนักเรียนในกลุ่มต้องร่วมกันคิดและต้องทำความเข้าใจให้ตรงกัน) แต่จะผิดหรือถูก ครูจะยังไม่เฉลย แต่จะสุ่มเรียกทุกกลุ่มในคำถามเดียวกัน เพื่อให้นักเรียนได้ตรวจเช็คคำตอบและวิธีทำ ครูสุ่มถามนักเรียนทุกกลุ่มจนได้คำตอบเดียวกันว่า ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ

11. ครูให้นักเรียนแต่ละคนในกลุ่มทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 128 เมื่อเสร็จแล้วครูให้นักเรียน

ทำกิจกรรม “ชักไซ้ไล่เรียง (Round Robin)” ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มผลัดกันพูดคำตอบของตน แล้วตรวจเช็คว่าได้คำตอบตรงกับเพื่อนไหม ถ้าไม่ตรงกันให้นักเรียนในกลุ่มช่วยตรวจสอบข้อผิดพลาดของเพื่อน พร้อมทั้งอธิบายซึ่งกันและกันจนเป็นที่เข้าใจร่วมกัน

ขั้นสรุป

ตรวจสอบและสรุป

ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- สมการเชิงเส้นเป็นอย่างไร

  (**แนวตอบ** สมการที่มีเลขชี้กำลังของตัวแปรทุกตัวเป็นหนึ่ง)

- สมการเชิงเส้นที่มีหลายตัวแปร จะเรียกว่าอย่างไร

  (**แนวตอบ** สมการเชิงเส้น n ตัวแปร เมื่อ n แทนจำนวนตัวแปร)

- ระบบสมการเชิงเส้นเป็นอย่างไร

  (**แนวตอบ** สมการเชิงเส้นที่มีมากกว่าหนึ่งสมการ)

- การแก้ระบบสมการเชิงเส้นทำได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** นักเรียนสามารถตอบได้หลากหลายขึ้นอยู่กับความรู้พื้นฐานของนักเรียนแต่ละคน เช่น การกำจัดตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง เป็นต้น)

ฝึกปฏิบัติ

ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 2.1 ในหนังสือเรียน หน้า 129

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
1. การประเมินก่อนเรียน - แบบทดสอบก่อนเรียน หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง เมทริกซ์	- ตรวจแบบทดสอบก่อนเรียน	- แบบทดสอบก่อนเรียน	- ประเมินตามสภาพจริง

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
2. ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) ระบบสมการเชิงเส้น	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 2.1 - ตรวจ Exercise 2.1	- แบบฝึกทักษะ 2.1 - Exercise 2.1	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

30) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เมทริกซ์

31) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เมทริกซ์

แหล่งการเรียนรู้

1) ห้องสมุด

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 15

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง เมทริกซ์ **จำนวน 20 ชั่วโมง**

เรื่อง เมทริกซ์ **จำนวน 5 ชั่วโมง**

ผู้สอน นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล **โรงเรียนสตรีศึกษา**

ผลการเรียนรู้

4) เข้าใจความหมาย หาผลลัพธ์ของการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์ และหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยนหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ n x n เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสาม

5) หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ 2 x 2

6) แก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผันและการดำเนินการตามแถว

จุดประสงค์การเรียนรู้

1) สามารถเขียนข้อมูลให้อยู่ในรูปเมทริกซ์เขียนเมทริกซ์สลับเปลี่ยนได้ (K)

2) แสดงการเท่ากัน การบวก และการคูณเมทริกซ์ที่กำหนดให้ได้ (K)

3) ให้เหตุผลในการแสดงการเท่ากัน การบวก และการคูณเมทริกซ์ที่กำหนดให้ได้ได้ (P)

4) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

1) เมทริกซ์และเมทริกซ์สับเปลี่ยน

2) การบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณเมทริกซ์ระหว่างเมทริกซ์

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

เมทริกซ์ คือ ชุดของจำนวนซึ่งเขียนเรียงกัน m แถว (row) n หลัก (column) เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกภายในเครื่องหมายวงเล็บ เมทริกซ์จะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ มีมิติเดียวกันและสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเท่ากัน และเมทริกซ์จะบวกกัน เมทริกซ์แถวและหลักสลับกัน จะเรียกว่า เมทริกซ์สลับเปลี่ยน การบวกเมทริกซ์ทำได้โดยพิจารณามิติของเมทริกซ์ว่าเป็นมิติเดียวกัน เมื่อมีมิติเดียวกันให้นำสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมาบวกกัน การคูณกันของเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัวทำได้โดยนำค่าคงตัวไปคูณกับสมาชิกแต่ละตัวในเมทริกซ์ และ

การคูณเมทริกซ์ A เมทริกซ์ B จะคูณกันได้ ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการเปรียบเทียบ 2) ทักษะการเชื่อมโยง 3) ทักษะการให้เหตุผล 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้

📖 **แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : นิรนัย (Deductive Method)**

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

กำหนดขอบเขตของปัญหา

1. ครูกระตุ้นความสนใจของนักเรียนโดยให้นักเรียนทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียน หน้า 130 จากนั้นครูถามคำถามจากกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียน หน้า 130 ดังนี้

- เมทริกซ์ข้างต้นมีจำนวนแถวและจำนวนหลักเป็นเท่าใด

  (**แนวตอบ** 2 แถว 3 หลัก)

- ถ้าตัวเลขแต่ละตัวอยู่ในเมทริกซ์เรียกว่า “สมาชิกของเมทริกซ์” และสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 1 ของเมทริกซ์ คือ จำนวนยางลบแต่ละยี่ห้อในร้าน ก. แล้วสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 2 คืออะไร

  (**แนวตอบ** ยี่ห้อในร้าน ข.)

- ถ้าสมาชิกแต่ละตัวในหลักที่ 1 ของเมทริกซ์ คือ จำนวนยางลบยี่ห้อ A ที่ขายอยู่ในร้าน ก.

และร้าน ข. แล้วสมาชิกแต่ละตัวในหลักที่ 2 และหลักที่ 3 คืออะไร

(**แนวตอบ** จำนวนยางลบยี่ห้อ B และ C ที่ขายอยู่ในร้าน ก. และร้าน ข. ตามลำดับ)

ขั้นสอน

แสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

1. ครูอธิบายกับนักเรียนว่า จากกิจกรรมคณิตศาสตร์ จะเห็นว่า ชุดของจำนวนที่เขียนอยู่ในวงเล็บ [ ] หรือ ( ) เป็นการนำจำนวนที่อยู่ในตารางมาเขียนเรียงใหม่ตามแถวและคอลัมน์เดิม ในทางคณิตศาสตร์จะเรียกชุดของจำนวนที่เขียนในวงเล็บ [ ] หรือ ( ) ว่า **เมทริกซ์**

2. ครูอธิบายนิยามของเมทริกซ์ ในหนังสือเรียน หน้า 131 ว่า เมทริกซ์ คือ ชุดของจำนวน mn จำนวน $(m,n \in I^+)$ ซึ่งเขียนเรียงกัน m แถว (row) n หลัก (column) ภายในเครื่องหมายวงเล็บ ในรูป

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

แถวที่ 1
แถวที่ 2

หลักที่ 1 หลักที่ 2 หลักที่ m

เรียก a_{ij} ว่าสมาชิก (entry) ในแถวที่ I และหลักที่ j ของเมทริกซ์ หรือสมาชิกในตำแหน่งที่ ij ของเมทริกซ์ เมื่อ $i \in \{1,2,3,...,m\}$ และ $j \in \{1,2,3,...,n\}$ เรียก เมทริกซ์ที่มี m แถว และ n หลัก ว่าเมทริกซ์ที่มีมิติ (dimension) $m \times n$

3. ครูอธิบายนักเรียนเพิ่มเติมว่า จากบทนิยาม สามารถแบ่งชนิดของเมทริกซ์สามารถแบ่งได้โดยใช้จำนวนแถว จำนวนหลัก และสมาชิกของเมทริกซ์ ดังนี้

- เมทริกซ์แถว (Row Matrix) คือเมทริกซ์ที่มี 1 แถว และ n หลัก มีมิติเป็น 1 x n
- เมทริกซ์หลัก (Columm Matrix) คือ เมทริกซ์ที่มี n แถว และ 1 หลัก จึงมีมิติเป็น n x 1
- เมทริกซ์จัตุรัส (Square Matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวและหลักเท่ากัน
- เมทริกซ์ศูนย์ (Zero Matrix or ANull Matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\underline{0}$
- เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix or Unit Matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกในแนวทแยงหลักเป็น 1 ทั้งหมดและสมาชิกที่ไม่ได้อยู่ในแนวทแยงหลักเป็นศูนย์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ I_n

เมื่อ n เป็นจำนวนแถวและจำนวนหลักของเมทริกซ์ พร้อมทั้งครูอธิบายความรู้ในกรอบ “คณิตน่ารู้” ที่ระบุว่า กำหนดเมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น $n \times n$ จะกล่าวว่า แนวทแยงหลักของเมทริกซ์ A ประกอบไปด้วยสมาชิกในแถวที่ i หลักที่ j เมื่อ i = j สำหรับทุก $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ และ $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

ใช้ทฤษฎี หลักการ

4. ครูกำหนดเมทริกซ์ให้นักเรียนจำแนกประเภท โดยใช้เกณฑ์การจำแนกตามที่ครูได้อธิบายไว้ข้างต้น ซึ่งครูกำหนดเมทริกซ์ ดังนี้

- เมทริกซ์ $\mathrm{A} = [0]$ เป็นเมทริกซ์ประเภทใดบ้าง

  (**แนวตอบ** เมทริกซ์แถว เมทริกซ์หลัก เมทริกซ์จัตุรัส และเมทริกซ์ศูนย์)
- เมทริกซ์ $\mathrm{B} = [1]$ เป็นเมทริกซ์ประเภทใดบ้าง

  (**แนวตอบ** เมทริกซ์แถว เมทริกซ์หลัก เมทริกซ์จัตุรัส และเมทริกซ์เอกลักษณ์)
- เมทริกซ์ $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ประเภทใดบ้าง

  (**แนวตอบ** เมทริกซ์แถว)
- เมทริกซ์ $\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ประเภทใดบ้าง

  (**แนวตอบ** เมทริกซ์หลัก)
- เมทริกซ์ $\mathrm{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ประเภทใดบ้าง

  (**แนวตอบ** เมทริกซ์จัตุรัส และเมทริกซ์ศูนย์)
- เมทริกซ์ $\mathrm{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ประเภทใดบ้าง

  (**แนวตอบ** เมทริกซ์จัตุรัส และเมทริกซ์เอกลักษณ์)
- เมทริกซ์ $\mathrm{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ประเภทใดบ้าง

  (**แนวตอบ** เมทริกซ์จัตุรัส)
- เมทริกซ์ $\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ -9 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ประเภทใดบ้าง

  (**แนวตอบ** เมทริกซ์จัตุรัส)

เมื่อนักเรียนทำเสร็จ ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ โดยครูจะให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายคำตอบ

5. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 4 ในหนังสือเรียน หน้า 133 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- a_{11} เท่ากับเท่าใด

(แนวตอบ $a_{11} = 2$)

- a_{12} เท่ากับเท่าใด

  (แนวตอบ $a_{12} = 3$)

- a_{13} เท่ากับเท่าใด

  (แนวตอบ $a_{13} = 3$)

- a_{21} เท่ากับเท่าใด

  (แนวตอบ $a_{21} = 4$)

- a_{22} เท่ากับเท่าใด

  (แนวตอบ $a_{22} = 2$)

- a_{23} เท่ากับเท่าใด

  (แนวตอบ $a_{23} = 3$)

- $a_{21} + a_{22} - a_{13} + a_{11}$ เท่ากับเท่าใด

  (แนวตอบ $a_{21} + a_{22} - a_{13} + a_{11} = 4 + 2 - 3 + 2 = 5$)

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 134 เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้ว ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

6. ครูให้นักเรียนศึกษาการเท่ากันของเมทริกซ์ ในหนังสือเรียน หน้า 134 จากนั้นครูถามคำถามนักเรียนดังนี้

   - นักเรียนมีหลักการสังเกตเมทริกซ์ที่เท่ากันอย่างไร

     (**แนวตอบ** นักเรียนสามารถตอบได้อย่างหลากหลายตามข้อสังเกตของนักเรียนแต่ละ เช่น นักเรียนอาจตอบว่า มีสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเหมือนกัน และมีมิติเดียวกัน)

7. ครูถามคำถามจากกรอบ “Thinking Time” ในหนังสือเรียน หน้า 134 ว่า ถ้าเมทริกซ์ A และ B เป็นมิติเดียวกัน นักเรียนคิดว่าเมทริกซ์ A และ B เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

   (**แนวตอบ** ไม่เท่ากัน เพราะ สมาชิกของเมทริกซ์ A และ B ในตำแหน่งเดียวกันอาจไม่เหมือนกันก็ได้)

8. ครูเขียนโจทย์ในตัวอย่างที่ 5 ในหนังสือเรียน หน้า 134 บนกระดาน ดังนี้

   กำหนด $\begin{bmatrix} x-5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y+7 \end{bmatrix}$ ให้หาค่าของ x และ y

โดยครูจะให้นักเรียนในห้องร่วมกันทำ ด้วยการใช้การถามแนะ ดังนี้

- จากการเท่ากันของเมทริกซ์เรียนจะหาค่า x และ y ได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** นำสมาชิกของเมทริกซ์ในตำแหน่งเดียวกันมาเท่ากัน และแก้สมการ)

- ความสัมพันธ์ของสมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 1 เขียนอย่างไร

  (**แนวตอบ** $x - 5 = 0$)

- จะได้ค่าของ x เป็นเท่าใด

  (**แนวตอบ** จากการแก้สมการจะได้ $x = 5$)

- ความสัมพันธ์ของสมาชิกในแถวที่ 2 หลักที่ 1 เขียนอย่างไร

  (**แนวตอบ** $-4 = y + 7$)

- จะได้ค่าของ x เป็นเท่าใด

  (**แนวตอบ** จากการแก้สมการจะได้ $y = -11$)

- ค่าของ x และ y ที่ทำให้ $\begin{bmatrix} x-5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y+7 \end{bmatrix}$ เป็นเท่าใด

  (**แนวตอบ** ค่าของ x และ y ที่ทำให้เมทริกซ์ที่กำหนดเท่ากัน คือ $x = 5$ และ $y = -11$)

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 135 เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้ว ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

9. ครูเขียนโจทย์ในตัวอย่างที่ 6 ในหนังสือเรียน หน้า 135 บนกระดาน ดังนี้

   กำหนด $\begin{bmatrix} x-y \\ -2x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \end{bmatrix}$ ให้หาค่าของ x และ y

   โดยครูจะให้นักเรียนในห้องร่วมกันทำ ด้วยการใช้การถามแนะ ดังนี้

   - จากการเท่ากันของเมทริกซ์เรียนจะหาค่า x และ y ได้อย่างไร

     (**แนวตอบ** นำสมาชิกของเมทริกซ์ในตำแหน่งเดียวกันมาเท่ากัน และแก้ระบบสมการ)

   - ความสัมพันธ์ของสมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 1 เขียนอย่างไร

     (**แนวตอบ** $x - y = 3$ .....(1))

   - ความสัมพันธ์ของสมาชิกในแถวที่ 2 หลักที่ 1 เขียนอย่างไร

     (**แนวตอบ** $-2x+2y = -8$ .....(2))

   - คำตอบของระบบสมการมีลักษณะเป็นอย่างไร

     (**แนวตอบ** มีหลายคำตอบ)

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 135 เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้ว ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นสอน

แสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

10. ครูกระตุ้นความสนใจของนักเรียนโดยการให้นักเรียนทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียน หน้า 136 จากนั้นครูถามคำถามจากกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียน หน้า 136 ดังนี้

- เขียนเมทริกซ์ A และ B แทนข้อมูลในตารางที่ 2 และ 3 ตามลำดับ

  (**แนวตอบ** $A = \begin{bmatrix} 35 & 52 & 61 \\ 50 & 35 & 33 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 35 & 50 \\ 52 & 35 \\ 61 & 33 \end{bmatrix}$)

- เมทริกซ์ A มีจำนวนแถว จำนวนหลัก และมิติเป็นเท่าใด

  (**แนวตอบ** 2 แถว 3 หลัก เขียนเป็นมิติได้ 2x3)

- เมทริกซ์ B มีจำนวนแถว จำนวนหลัก และมิติเป็นเท่าใด

  (**แนวตอบ** 3 แถว 2 หลัก เขียนเป็นมิติได้ 3x2)

- ถ้า a_{ij} เมื่อ $i \in \{1,2\}$ และ $i \in \{1,2,3\}$ เป็นสมาชิกของ A และ b_{ij} เมื่อ $i \in \{1,2,3\}$ และ $j \in \{1,2\}$ เป็นสมาชิกของ B แล้ว $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, b_{31}$ และ b_{32} มีค่าเป็นเท่าใด

  (**แนวตอบ** 35, 52, 61, 50, 35, 33, 35, 50, 52, 35, 61 และ 33 ตามลำดับ)

- สมาชิกแต่ละตัวของเมทริกซ์ A และ B มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

  (**แนวตอบ** สลับแถวและหลักกัน)

11. ครูอธิบายกับนักเรียนว่า จากกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียน หน้า 136 จะเห็นว่า A เป็นเมทริกซ์ที่มี 2 แถว 3 หลัก และมีมิติเป็น 2×3 และ B เป็นเมทริกซ์ที่มี 3 แถว 2 หลัก และมีมิติเป็น 3×2 ซึ่งสมาชิกในแถวที่ 1 จากซ้ายไปขวาเมทริกซ์ A เหมือนกับสมาชิกในหลักที่ 1 ของเมทริกซ์ B จากบนลงล่าง และสมาชิก

ในแถวที่ 2 จากซ้ายไปขวาของเมทริกซ์ A เหมือนกับสมาชิกในหลักที่ 2 ของเมทริกซ์ B จากบนลงล่าง ในทางคณิตศาสตร์จะเรียก B ว่า **เมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A**

12. ครูอธิบายบทนิยามของเมทริกซ์สลับเปลี่ยน ในหนังสือเรียน หน้า 137 กำหนด $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ถ้า $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times m}$ ที่ $b_{ij}=a_{ji}$ ทุก $i\in\{1,2,3,\ldots,m\}$ และ $j\in\{1,2,3,\ldots,n\}$ แล้วจะเรียก B ว่า **เมทริกซ์สลับเปลี่ยน** (transpose of a matrix) **ของ A** และเขียน B ด้วย A^t (อ่านว่า “เอ ทรานสโพส”)

ใช้ทฤษฎี หลักการ

13. ครูเขียนเมทริกซ์ $A=[0 \quad -7]$ และ $B=\begin{bmatrix}1 & 7\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$ แล้วให้นักเรียนร่วมกันหา A^t และ B^t จากนั้นครูถามคำถาม ดังนี้

- A^t เท่ากับเท่าใด

  (แนวตอบ $A^t=\begin{bmatrix}0\\ -7\end{bmatrix}$)

- B^t เท่ากับเท่าใด

  (แนวตอบ $A^t=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 7 & 4 & 6\end{bmatrix}$)

จากนั้นครูอธิบายกรอบ “คณิตน่ารู้” ให้นักเรียนว่า “ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ แล้ว $A^t=\left[a_{ji}\right]_{n\times m}$”

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นสอน

แสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

14. ครูกระตุ้นความสนใจของนักเรียนโดยการให้นักเรียนทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียน หน้า 137 จากนั้นครูถามคำถามจากกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียน หน้า 137 ดังนี้

- นักเรียนคิดว่าเมทริกซ์ X + Y จะบวกกันได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** นำจำนวนในตำแหน่งเดียวกันของเมทริกซ์ X และ Y มาบวกกัน)

- เมทริกซ์ X + Y เป็นเท่าใด

  (**แนวตอบ** $X+Y=\begin{bmatrix}65 & 92 & 96\\ 90 & 65 & 68\end{bmatrix}$)

- สมาชิกแต่ละตัวที่อยู่ในเมทริกซ์ที่เกิดจากเมทริกซ์ X บวกกับ Y มีความหมายว่าอย่างไร

(**แนวตอบ** สมาชิกแต่ละตัวในเมทริกซ์ที่เกิดจากเมทริกซ์ X บวกกับ Y จะหมายถึงจำนวนยางลบแต่ละยี่ห้อทั้งหมดที่มีในร้าน)

หลังจากนั้นครูเปิดการบวกเมทริกซ์โดยใช้โปรแกรม Microsoft Excel 2016 โดยการสแกน QR Code ในหนังสือเรียน หน้า 137 จากนั้นครูให้นักเรียนตอบคำถามในกรอบ “Thinking Time” ในหนังสือเรียน หน้า 137

(**แนวตอบ** เมทริกซ์ที่กำหนดบวกกันไม่ได้ เพราะ ไม่มีมิติเดียวกัน คือ เมทริกซ์ที่กำหนดมีจำนวนแถวไม่เท่ากันและมีจำนวนหลักไม่เท่ากัน)

15. ครูอธิบายกับนักเรียนว่า จากกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียน หน้า 137 จะเห็น เมื่อนำเมทริกซ์สองเมทริกซ์ที่มีมิติเดียวกันมาบวกกัน ผลบวกที่ได้จะเป็นเมทริกซ์ที่สมาชิกในแต่ละแถวและหลักเกิดจากสมาชิกที่อยู่ในแถวและหลักเดียวกันของทั้งสองเมทริกซ์มาบวกกัน

16. ครูอธิบายบทนิยามของการบวกเมทริกซ์ ในหนังสือเรียน หน้า 138 กำหนด $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ เมทริกซ์ A บวกกับเมทริกซ์ B คือ $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ เมื่อ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ สำหรับทุก $i \in \{1,2,3,\ldots,m\}$ และ $j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ และจะเขียนสัญลักษณ์ A บวกกับ B ด้วย A + B

ใช้ทฤษฎี หลักการ

17. ครูเขียนตัวอย่างที่ 7 ในหนังสือเรียน หน้า 138 บนกระดาน จากนั้นครูนักเรียนออกมาแสดงวิธีทำหน้าชั้นเรียน โดยครูคอยถามคำถามชี้แนะ ดังนี้

- เมทริกซ์ที่กำหนดบวกกันได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

(**แนวตอบ** เมทริกซ์ที่กำหนดบวกกันได้ เพราะ มีมิติเดียวกัน คือ เมทริกซ์ที่กำหนดมีจำนวนแถวเท่ากันและมีจำนวนหลักเท่ากัน)

- เมื่อเมทริกซ์ที่กำหนดมีมิติเดียวกัน แล้วจะบวกกันได้อย่างไร

(**แนวตอบ** นำสมาชิกที่อยู่ในแถวและหลักเดียวกันของทั้งสองเมทริกซ์มาบวกกัน)

เมื่อตัวอย่างเสร็จสิ้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 138 เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้ว ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

ชั่วโมงที่ 4

ขั้นสอน

แสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

18. ครูกระตุ้นความสนใจของนักเรียนโดยการให้นักเรียนทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียน หน้า 139 จากนั้นครูถามคำถามจากกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียน หน้า 139 ดังนี้

- นักเรียนคิดว่าการคูณ 2 กับเมทริกซ์ M ทำได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** นำจำนวน 2 คูณกับสมาชิกทั้งหมดของเมทริกซ์ M)

- การคูณ 2 กับเมทริกซ์ M เป็นเท่าใด

  (**แนวตอบ** $2M = \begin{bmatrix} 70 & 120 & 100 \\ 122 & 88 & 74 \end{bmatrix}$)

- สมาชิกแต่ละตัวที่อยู่ในเมทริกซ์ที่เกิดจากการคูณ 2 กับเมทริกซ์ M มีความหมายว่าอย่างไร

  (**แนวตอบ** สมาชิกแต่ละตัวในเมทริกซ์ที่เกิดจากการคูณ 2 กับเมทริกซ์ M จะหมายถึง จำนวนยางลบแต่ละยี่ห้อที่ต้องการสำรองให้มีจำนวนเป็น 2 เท่าของร้าน ก. และร้าน ข. ในเดือนพฤษภาคม)

19. ครูอธิบายกับนักเรียนว่า จากกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียน หน้า 139 จะเห็น การคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัวทำได้โดยนำค่าคงตัวไปคูณกับสมาชิกแต่ละตัวในเมทริกซ์

20. ครูอธิบายบทนิยามของการคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัว ในหนังสือเรียน หน้า 139 ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ c เป็นค่าคงตัว ผลคูณของ c กับเมทริกซ์ A คือเมทริกซ์ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ เมื่อ $b_{ij} = c_{ij}$ สำหรับทุก $i \in \{1,2,3,...,m\}$ และ $j \in \{1,2,3,...,n\}$ และเขียนแทนผลคูณของ c กับเมทริกซ์ A ด้วย cA ในกรณีที่ -1 จะเขียนแทนผลคูณของ –1 กับเมทรกซ์ A ด้วย -A

ใช้ทฤษฎี หลักการ

21. ครูเขียนตัวอย่างที่ 8 ในหนังสือเรียน หน้า 140 บนกระดาน จากนั้น ครูสุ่มนักเรียน 2 คน ออกมาแสดงวิธีการดำเนินการหา 3A และ (-2)B ครูและเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความถูกต้อง และครูจะถามคำถามชี้แนะนักเรียน ดังนี้

- ค่าคงตัวคูณกับเมทริกซ์ ได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** นำค่าคงตัวไปคูณกับสมาชิกแต่ละตัวในเมทริกซ์)

- 3A + (-2)B หาได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** นำค่าคงตัวไปคูณกับสมาชิกแต่ละตัวในเมทริกซ์ก่อนแล้วจึงพิจารณาว่าเมทริกซ์ 3A กับเมทริกซ์ (-2)B บวกกันได้หรือไม่ ถ้าเมทริกซ์ 3A กับเมทริกซ์ (-2)B มีมิติเดียวกันก็สามารถบวกกันได้ แต่ถ้าเมทริกซ์ 3A กับเมทริกซ์ (-2)B ไม่มีมิติเดียวกันก็ไม่สามารถบวกกันได้)

เมื่อนักเรียนที่เป็นตัวแทนทำเสร็จและนักเรียนทั้งหมดทำความเข้าใจร่วมกันแล้ว ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนหน้า 140 เมื่อทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

22. ครูอธิบายกับนักเรียนว่า จากตัวอย่างบนกระดานซึ่งเป็นตัวอย่างที่ 8 ในหนังสือเรียน หน้า 140

จะเห็นว่า ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเดียวกัน α, β เป็นค่าคงตัว แล้วนักเรียนสามารถหา $\alpha A + \beta B$ ได้เสมอ ในทำนองเดียวกัน นักเรียนยังสามารถหา $\alpha A - \beta B$ ได้

23. ครูอธิบายบทนิยามการลบเมทริกซ์ ในหนังสือเรียน หน้า 140 กำหนด $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ และ α, β เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า $\alpha A - \beta B = [c_{ij}]_{m\times n}$ เมื่อ $c_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta b_{ij}$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

24. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 9 ในหนังสือเรียน หน้า 141 จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- A – B หาได้อย่าง

(**แนวตอบ** พิจารณามิติของเมทริกซ์ A และ B ว่าเป็นมิติเดียวกัน เมื่อมีมิติเดียวกัน ให้นำสมาชิกที่อยู่ในแถวและหลักเดียวกันของทั้งสองเมทริกซ์มาลบกัน)

- 2A – 3B หาได้อย่างไร

(**แนวตอบ** นำค่าคงตัวไปคูณกับสมาชิกแต่ละตัวในเมทริกซ์ก่อน แล้วจึงพิจารณาว่าเมทริกซ์ 2A กับเมทริกซ์ 3B ลบกันได้หรือไม่ ถ้าเมทริกซ์ 2A กับเมทริกซ์ 3B มีมิติเดียวกันก็สามารถลบกันได้ แต่ถ้าเมทริกซ์ 2A กับเมทริกซ์ 3B ไม่มีมิติเดียวกันก็ไม่สามารถลบกันได้)

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 141 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

25. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วให้ทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ดังนี้

- ให้นักเรียนทำ “Thinking Time” ในหนังสือเรียน หน้า 141
- ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจร่วมกัน หลังจากนั้นครูลุ่มนักเรียนในแต่ละกลุ่มออกมาเฉลยคำตอบ และให้นักเรียนทั้งร่วมกันอภิปรายแสดงความเห็น โดยใช้พื้นฐานของ บทนิยาม พิจารณาความสมเหตุสมผล

26. ครูให้นักเรียนศึกษาและทำความเข้าใจ สมบัติของเมทริกซ์เกี่ยวกับการบวก การคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัว และเมทริกซ์สลับเปลี่ยน ในหนังสือเรียน หน้า 142

27. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 10 ในหนังสือเรียน หน้า 142 จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- หา X ที่ทำให้ $2A + X = \frac{1}{3}(X + A)$ หาได้อย่างไร

(**แนวตอบ** ใช้สมบัติการเท่ากัน และดำเนินการแนวทางเดียวกับการแก้สมการ)

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 141 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

ชั่วโมงที่ 5

ขั้นสอน

แสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

28. ครูกระตุ้นความสนใจของนักเรียนโดยการให้นักเรียนทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียน หน้า 143-144 จากนั้นครูถามคำถามจากกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียน หน้า 143-144 ดังนี้

- นักเรียนคิดว่า MN เป็นเท่าใด

  (**แนวตอบ** $MN = \begin{bmatrix} 2,250 \\ 2,010 \end{bmatrix}$)

- สมมติว่า P เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากเมทริกซ์ M คูณกับเมทริกซ์ N แล้วเมทริกซ์ M, N และ P มีมิติเป็นเท่าใด

  (**แนวตอบ** เมทริกซ์ M มีมิติ 2×3, เมทริกซ์ N มีมิติ 3×1 และเมทริกซ์ M มีมิติ 2×1)

- มิติของเมทริกซ์ M คูณกับเมทริกซ์ N แล้วเมทริกซ์ M, N และ P มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

  (**แนวตอบ** มิติของเมทริกซ์ P มาจากแถวของเมทริกซ์ M และหลักของเมทริกซ์ N)

- นักเรียนคิดว่าเงื่อนไขใดบ้างที่จะทำให้เมทริกซ์ 2 เมทริกซ์ใด ๆ คูณกันได้

  (**แนวตอบ** เมทริกซ์ A คูณกับเมทริกซ์ B จะคูณกันได้ ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B)

29. ครูให้นักเรียนศึกษา การคูณเมทริกซ์กับเมทริกซ์ จากกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียน หน้า 144-145 พร้อมทั้งเน้นย้ำกับนักเรียนว่า เมทริกซ์ A คูณกับเมทริกซ์ B จะคูณกันได้ ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B

30. ครูอธิบายบทนิยามของการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ ในหนังสือเรียน หน้า 146

กำหนด $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n \times r}$ จะได้ว่า $AB = [c_{ij}]_{m \times r}$

เมื่อ $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kr} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kr} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{kr} \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$

ใช้ทฤษฎี หลักการ

31. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 11 ในหนังสือเรียน หน้า 146 แล้วให้นักเรียนแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- เมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ B จะคูณกันได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** เมทริกซ์ A คูณกับเมทริกซ์ B จะคูณกันได้ ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B)

- เมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ B คูณกันได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

  (**แนวตอบ** ได้ เพราะจำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B)

- เมทริกซ์ B กับเมทริกซ์ A จะคูณกันได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** เมทริกซ์ B คูณกับเมทริกซ์ A จะคูณกันได้ ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของ B เท่ากับจำนวนแถวของ A)

- เมทริกซ์ B กับเมทริกซ์ A คูณกันได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

  (**แนวตอบ** ไม่ได้ เพราะจำนวนหลักของ B ไม่เท่ากับจำนวนแถวของ A)

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 146 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

32. ครูอธิบายกับนักเรียนว่า จากตัวอย่างที่ 11 ในหนังสือเรียน หน้า 146 จะเห็นว่า $AB \neq BA$ กล่าวได้ว่า เมทริกซ์ไม่มีสมบัติการสลับที่ของการคูณ

33. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 12 ในหนังสือเรียน หน้า 147 แล้วให้นักเรียนแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- เมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ B จะคูณกันได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** เมทริกซ์ A คูณกับเมทริกซ์ B จะคูณกันได้ ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B)

- เมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ B คูณกันได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

  (**แนวตอบ** ได้ เพราะจำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B)

- เมทริกซ์ B กับเมทริกซ์ C จะคูณกันได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** เมทริกซ์ B คูณกับเมทริกซ์ C จะคูณกันได้ ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของ B เท่ากับจำนวนแถวของ C)

- เมทริกซ์ B กับเมทริกซ์ C คูณกันได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

  (**แนวตอบ** ได้ เพราะจำนวนหลักของ B เท่ากับจำนวนแถวของ C)

- ผลคูณของเมทริกซ์ AB กับเมทริกซ์ C จะคูณกันได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** ผลคูณของเมทริกซ์ AB คูณกับเมทริกซ์ C จะคูณกันได้ ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของ AB เท่ากับจำนวนแถวของ C)

- ผลคูณของเมทริกซ์ AB กับเมทริกซ์ C คูณกันได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

  (**แนวตอบ** ได้ เพราะจำนวนหลักของ AB เท่ากับจำนวนแถวของ C)

- เมทริกซ์ A กับผลคูณของเมทริกซ์ BC จะคูณกันได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** เมทริกซ์ A คูณกับผลคูณของเมทริกซ์ BC จะคูณกันได้ ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ BC)

- A(BC) กับ (AB)C เท่ากันหรือไม่

  (**แนวตอบ** เท่ากัน)

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 147 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

34. ครูอธิบายกับนักเรียนว่า จากตัวอย่างที่ 12 ในหนังสือเรียน หน้า 147 จะเห็นว่า A(BC) = (AB)C กล่าวได้ว่า เมทริกซ์มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการคูณ

35. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 13 ในหนังสือเรียน หน้า 148 แล้วให้นักเรียนแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- A(B + C) กับ AB + AC เท่ากันหรือไม่

(**แนวตอบ** เท่ากัน)

- (A + B)C กับ AC + BC เท่ากันหรือไม่

(**แนวตอบ** เท่ากัน)

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 148 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

36. ครูอธิบายกับนักเรียนว่า จากตัวอย่างที่ 13 ในหนังสือเรียน หน้า 147 จะเห็นว่า A(B+C) = AB + AC และ (A + B)C = AC + BC กล่าวได้ว่า เมทริกซ์มีสมบัติการแจกแจง

37. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 14 ในหนังสือเรียน หน้า 148 แล้วให้นักเรียนแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $(AB)^t$ กับ B^tA^t เท่ากันหรือไม่

(**แนวตอบ** เท่ากัน)

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 150 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

38. ครูอธิบายกับนักเรียนว่า จากตัวอย่างที่ 14 ในหนังสือเรียน หน้า 150 จะเห็นว่า $(AB)^t = B^tA^t$

39. ครูอธิบายบทนิยามเมทริกซ์เอกลักษณ์ ในหนังสือเรียน หน้า 150 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ จะให้ $I_n = \left[i_{jk} \right]_{n\times n}$ เมื่อ j และ k เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ n โดยที่

$$i_{jk} = \begin{cases} 1 & ; j = k \\ 0 & ; j \neq k \end{cases}$$

และเรียก I_n ว่าเมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) มิติ $n\times n$ อาจเขียนแทน I_n ด้วย I

40. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 15 ในหนังสือเรียน หน้า 151 แล้วให้นักเรียนแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- AI กับ A เท่ากันหรือไม่

(**แนวตอบ** เท่ากัน)

- IA กับ A เท่ากันหรือไม่

(**แนวตอบ** เท่ากัน)

- AI กับ IA กับ A เท่ากันหรือไม่

(**แนวตอบ** เท่ากัน)

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 151 เมื่อนักเรียนทำเสร็จ

ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

41. ครูให้นักเรียนทำ “Thinking Time” ในหนังสือเรียน หน้า 151 แล้วให้นักเรียนแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- A กับ I_n คูณกันได้หรือไม่

  (**แนวตอบ** ได้ เพราะจำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ I_n)

- A กับ I_n คูณกันได้เท่าใด

  (**แนวตอบ** $AI_n = A$)

- I_m กับ A คูณกันได้หรือไม่

  (**แนวตอบ** ได้ เพราะจำนวนหลักของ I_m เท่ากับจำนวนแถวของ A)

- I_m กับ A คูณกันได้เท่าใด

  (**แนวตอบ** $I_mA = A$)

- $AI_n = I_mA = A$ เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

  (**แนวตอบ** เท่ากัน เพราะ $AI_n = A$ และ $I_mA = A$ ดังนั้น $AI_n = I_mA = A$)

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 151 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

42. ครูให้นักเรียนศึกษาสมบัติของเมทริกซ์เกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ และเมทริกซ์สลับเปลี่ยนในหนังสือเรียน หน้า 151-152

43. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 16 ในหนังสือเรียน หน้า 152 แล้วให้นักเรียนแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- A^2 หาได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** นำ A คูณกับ A จะได้ A^2)

- A^3 หาได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** นำ A คูณกับ A^2 จะได้ A^3)

- A^4 หาได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** นำ A คูณกับ A^3 จะได้ A^4)

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 152 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

44. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 17 ในหนังสือเรียน หน้า 153-154 แล้วให้นักเรียนแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $(A+B)^2$ กับ $A^2+2AB+B^2$ เท่ากันหรือไม่

  (**แนวตอบ** ไม่เท่ากัน)

- A^2-B^2 กับ $(A+B)(A-B)$ เท่ากันหรือไม่

  (**แนวตอบ** ไม่เท่ากัน)

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 154 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

45. ครูอธิบายกับนักเรียนว่า จากตัวอย่างที่ 13 ในหนังสือเรียน หน้า 147 จะเห็นว่า $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$ และ $A^2-B^2 \neq (A+B)(A-B)$ กล่าวได้ว่า เมทริกซ์มีสมบัติการแจกแจง

46. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วให้ทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ดังนี้

- ให้นักเรียนทำ “Thinking Time” ในหนังสือเรียน หน้า 154
- ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจร่วมกัน หลังจากนั้นครูลุ่มนักเรียนในแต่ละกลุ่มออกมาเฉลยคำตอบ และให้นักเรียนทั้งร่วมกันอภิปรายแสดงความเห็น

ขั้นสรุป

ตรวจสอบและสรุป

1. ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- เมทริกซ์ที่เท่ากันเป็นอย่างไร

  (**แนวตอบ** มีสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเหมือนกัน และมีมิติเดียวกัน)

- เมทริกซ์สลับเปลี่ยนเป็นอย่างไร

  (**แนวตอบ** สลับแถวและหลักกัน)

- เมทริกซ์สองเมทริกซ์จะบวกกันได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** เมทริกซ์จะบวกกันได้ เมื่อ มีมิติเดียวกัน คือ เมทริกซ์ที่กำหนดมีจำนวนแถวเท่ากันและมีจำนวนหลักเท่ากัน แล้วนำสมาชิกที่อยู่ในแถวและหลักเดียวกันของทั้งสองเมทริกซ์มาบวกกัน)

- ค่าคงตัวคูณกับเมทริกซ์ ได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** นำค่าคงตัวไปคูณกับสมาชิกแต่ละตัวในเมทริกซ์)

- เมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ B จะคูณกันได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** เมทริกซ์ A คูณกับเมทริกซ์ B จะคูณกันได้ ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B)

ฝึกปฏิบัติ

2. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 2.2 ในหนังสือเรียน หน้า 155-156

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) เมทริกซ์	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 2.2 - ตรวจ Exercise 2.2	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 2.2 - ตรวจ Exercise 2.2	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

1) หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ม.1 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ระบบจำนวนเต็ม
2) แบบฝึกหัดคณิตศาสตร์ ม.1 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ระบบจำนวนเต็ม
3) ใบงานที่ 2.1 เรื่อง คูณเมทริกซ์ด้วยคูณเมทริกซ์

แหล่งการเรียนรู้

1) ห้องเรียน
2) ห้องสมุด
3) อินเทอร์เนต

ใบงานที่ 2.1

เรื่อง คูณเมทริกซ์ด้วยคูณเมทริกซ์

<u>คำชี้แจง</u> : จงแสดงวิธีทำ

กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}-6 & 5 & 3\\ -3 & 5 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 7 & -4\\ -6 & 5\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

จงหา 1. $-2CA$

2. $3ABC$

ใบงานที่ 2.1

เฉลย

เรื่อง คูณเมทริกซ์ด้วยคูณเมทริกซ์

<u>คำชี้แจง</u> : จงแสดงวิธีทำ

กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}-6 & 5 & 3\\ -3 & 5 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 7 & -4\\ -6 & 5\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

จงหา 1. $-2CA$

2. $3ABC$

1. $-2CA = -2\left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6 & 5 & 3\\ -3 & 5 & -2\end{bmatrix}\right)$

$= -2\left(\begin{bmatrix}(-1)(-6)+(0)(-3) & (-1)(5)+0(5) & (-1)(3)+(0)(-2)\\ (1)(-6)+(-1)(-3) & (1)(5)+(-1)(5) & (1)(3)+(1)(-2)\end{bmatrix}\right)$

$= -2\left(\begin{bmatrix}3 & 0 & -5\\ -3 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)$

$= \begin{bmatrix}6 & 0 & -10\\ -6 & 0 & 2\end{bmatrix}$

2. $3ABC = 3\left(\begin{bmatrix}-6 & 5 & 3\\ -3 & 5 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 7 & -4\\ -6 & 5\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

$= 3\begin{pmatrix}12+35+18 & -18-20+15\\ 6+35-12 & 9-20-10\end{pmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

$= 3\begin{bmatrix}233 & -23\\ 29 & -21\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

$= 3\begin{bmatrix}(-1)(233)+(-1)(23) & (0)(233)+(-23)(-1)\\ (29)(-1)+(-21)(1) & (29)(0)+(-21)(-1)\end{bmatrix}$

$= 3\begin{bmatrix}-256 & 23\\ -50 & 21\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}-768 & 69\\ 150 & 63\end{bmatrix}$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 16

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง เมทริกซ์ **จำนวน 20 ชั่วโมง**

เรื่อง เมทริกซ์ผกผัน **จำนวน 4 ชั่วโมง**

ผู้สอน นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล **โรงเรียนสตรีศึกษา**

ผลการเรียนรู้

7) เข้าใจความหมาย หาผลลัพธ์ของการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์ และหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยนหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ n x n เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสาม

8) หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ 2 x 2

9) แก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผันและการดำเนินการตามแถว

จุดประสงค์การเรียนรู้

5) หาเมทริกซ์ผกผันที่มีมิติ 2×2 ได้ (K)

6) เชื่อมโยงความรู้เรื่องการคูณเมทริกซ์ ในการหาเมทริกซ์ผกผันได้ได้ถูกต้อง (P)

7) มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

เมทริกซ์ผกผัน

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

กำหนด A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ ถ้า B เป็น $n \times n$ ที่มีสมบัติว่า $AB = BA = I_n$ แล้วจะเรียก B ว่าเป็น เมทริกซ์ผกผันของ A และเขียน B ด้วย A^{-1}

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $ad - cb \neq 0$ แล้ว A มีเมทริกซ์ผกผันและ $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 4) ทักษะการเชื่อมโยง 5) ทักษะการปรับโครงสร้าง 6) ทักษะการตีความ 7) ทักษะกระบวนการคิดแก้ปัญหา 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้

📖 **แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching**

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

การใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

1. ครูทบทวนความรู้เดิมเรื่อง การคูณเมทริกซ์ของนักเรียน ดังนี้

- ค่าคงตัวคูณกับเมทริกซ์ ได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** นำค่าคงตัวไปคูณกับสมาชิกแต่ละตัวในเมทริกซ์)

- เมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ B จะคูณกันได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** เมทริกซ์ A คูณกับเมทริกซ์ B จะคูณกันได้ ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B)

2. ครูกระตุ้นความสนใจของนักเรียนโดยให้นักเรียนทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียน หน้า 137 จากนั้นครูถามคำถามจากกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียน หน้า 137 ดังนี้

- เมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ B จะคูณกันได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** เมทริกซ์ A คูณกับเมทริกซ์ B จะคูณกันได้ ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B)

- เมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ B คูณกันได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

(**แนวตอบ** ได้ เพราะจำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B)

- เมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ B คูณกันเป็นเท่าใด

(**แนวตอบ** $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- เมทริกซ์ B กับเมทริกซ์ A จะคูณกันได้อย่างไร

(**แนวตอบ** เมทริกซ์ B คูณกับเมทริกซ์ A จะคูณกันได้ ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของ B เท่ากับจำนวนแถวของ C)

- เมทริกซ์ B กับเมทริกซ์ A คูณกันได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

(**แนวตอบ** ได้ เพราะจำนวนหลักของ B เท่ากับจำนวนแถวของ A)

- เมทริกซ์ B กับเมทริกซ์ A คูณกันเป็นเท่าใด

(**แนวตอบ** $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ขั้นสอน

รู้ (Knowing)

5. ครูอธิบายกับนักเรียนว่า จากกิจกรรมคณิตศาสตร์ จะเห็นว่า A และ B เป็น 2×2 เมทริกซ์ ซึ่ง AB เท่ากับ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ BA เท่ากับ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จะเห็นว่า AB เท่ากับ BA มีค่าเท่ากันและเท่ากับ ในเรื่องเมทริกซ์ จะเรียก B ว่าเป็น **เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ A**

6. ครูอธิบายบทนิยามของเมทริกซ์ผกผัน ในหนังสือเรียน หน้า 157 กับนักเรียนว่า กำหนด A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ ถ้า B เป็น $n \times n$ ที่มีสมบัติว่า $AB = BA = I_n$ แล้วจะเรียก B ว่าเป็นเมทริกซ์ผกผันของ A และเขียน B ด้วย A^{-1}

7. ครูอธิบายกับนักเรียนว่า จากบทนิยาม ในหนังสือเรียน หน้า 157 จะได้ $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

เข้าใจ (Understanding)

8. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 18 ในหนังสือเรียน หน้า 158 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ จากนั้น

ครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- จะแสดงได้อย่างไรว่า A ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

(**แนวตอบ** แสดงให้เห็นว่าไม่มีเมทริกซ์ใดที่คูณกับเมทริกซ์ A แล้วได้ I_2)

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำกิจกรรม “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 158 เมื่อนักเรียน

ทำเสร็จครู “ลองทำดู” ดังนี้

(**แนวคำตอบ** สมมติ B = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A

จากบทนิยามเมทริกซ์ผกผัน จะได้ว่า AB = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 5 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}a + 5c & -\frac{1}{2}b + 5d \\ -a + 10c & -b + 10d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จากบทนิยามการเท่ากันของเมทริกซ์ จะได้ว่า

$$-\frac{1}{2}a + 5c = 1 \quad \text{..... (1)}$$

$$-a + 10c = 0 \quad \text{..... (2)}$$

พิจารณาสมการ (2) จะได้ว่า

$$(\frac{1}{2})(-a + 10c) = (0)(\frac{1}{2})$$

$$-\frac{1}{2}a + 5c = 0 \quad \text{..... (2)}$$

จากสมการ (1) จะเห็นว่า $-\frac{1}{2}a + 5c = 1$ แต่สมการ (2) $-\frac{1}{2}a + 5c = 0$

ดังนั้น สมการเป็นเท็จ

แสดงว่า (1) และ (2) ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ทำให้ ไม่มีเมทริกซ์ B ที่มีมิติ 2x2 ซึ่งทำให้ AB = I_2

นั่นคือ A ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน)

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นสอน

เข้าใจ (Understanding)

9. ครูให้นักเรียนจับคู่ แต่ละคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 19 ในหนังสือเรียน หน้า 159-160 โดยให้นักเรียนแต่ละคู่พูดคุย ซักถามกัน ในเรื่องเมทริกซ์ผกผัน หลังจากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- จะแสดงได้อย่างไรว่า B เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A

(**แนวตอบ** แสดงให้เห็นว่าเมทริกซ์ B คูณกับเมทริกซ์ A แล้วได้ I_3 และเมทริกซ์ A คูณกับเมทริกซ์

B แล้วได้ I_3)

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำกิจกรรม “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 158 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครู “ลองทำดู” ดังนี้

(วิธีทำ สมมติ B เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A

โดยบทนิยามเมทริกซ์ผกผัน จะได้ว่า AB = BA = I_3

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} -3+3+4 & -21+9+12 & -12+12+0 \\ 1+(-1)+0 & 7-3+0 & 4-4+0 \\ 0+1-1 & 0+3-3 & 0+4+0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$BA = \left(\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} -3+7+0 & 3-7+4 & 4+0-4 \\ -3+3+0 & 3-3+4 & 4+0-4 \\ -3+3+0 & 3-3+0 & 4+0+0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

ดังนั้น B เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A)

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นสอน

เข้าใจ (Understanding)

10. ครูอธิบายให้นักเรียนว่า “เนื่องจาก เมทริกซ์ไม่มีสมบัติสลับที่การคูณ จึงทำให้เมทริกซ์ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน ดังนั้น การหาเมทริกซ์ผกผันจังมีความยุ่งยากและมีวิธีหาได้หลายวิธี ดังต่อไปนี้

พิจารณาการหา A^{-1} เมื่อกำหนด $A = [a]$ และ $a \neq 0$

ให้ $$A^{-1} = [x]$$

จะได้ $$AA^{-1} = A^{-1}A = I_1$$

ดังนั้น $$[a][x] = [1] \text{ และ } [x][a] = [1]$$

$$[ax] = [1]$$

จากบทนิยามการเท่ากันของเมทริกซ์ จะได้ว่า

$$x = \frac{1}{a}$$

นำไปตรวจสอบผลคูณ จะพบว่า

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_1$$

จึงได้ข้อสรุปว่า ถ้า $A = [a]$ ละ $a \neq 0$ แล้ว A มีเมทริกซ์ผกผัน

และ $$A^{-1} = \left[\frac{1}{a}\right]$$

เมทริกซ์ผกผันของ 1x1 เมทริกซ์ จะมีสมาชิกเป็นส่วนกลับของเมทริกซ์นั้น ที่ไม่เท่ากับ 0”

ลงมือทำ (Doing)

11. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วให้ทำกิจกรรม

คณิตศาสตร์ ดังนี้

- ให้นักเรียนทำ “Thinking Time” ในหนังสือเรียน หน้า 161
- ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจร่วมกัน หลังจากนั้นครูลุ่มนักเรียนในแต่ละกลุ่มออกมาเฉลยคำตอบ และให้นักเรียนทั้งร่วมกันอภิปรายแสดงความเห็น

(**แนวคำตอบ** $A^{-1} = -\frac{1}{2}$, $B^{-1} = 3$ และ $C^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$)

ชั่วโมงที่ 4

ขั้นสอน

เข้าใจ (Understanding)

12. ครูให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาในหนังสือเรียน หน้า 161-162 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- จากการศึกษาเนื้อหาในหนังสือเรียน หน้า 161-162 นักเรียนได้ข้อสรุปอะไร

  (**แนวตอบ** $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$)
- $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ มีเงื่อนไขสำคัญอะไรที่ต้องพิจารณาเสมอ

  (**แนวตอบ** $(ad - bc) \neq 0$)
- ข้อสรุปที่ได้ใช้ได้กับเมทริกซ์ใด และมิติใด

  (**แนวตอบ** เมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติ 2×2)

ลงมือทำ (Doing)

13. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วให้ทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ดังนี้

- ให้นักเรียนทำ “Thinking Time” ในหนังสือเรียน หน้า 162
- ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจร่วมกัน หลังจากนั้นครูลุ่มนักเรียนในแต่ละกลุ่มออกมาเฉลยคำตอบ และให้นักเรียนทั้งร่วมกันอภิปรายแสดงความเห็น

(**แนวคำตอบ** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{(1)(4)-(2)(3)}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{4-6}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(0)(-7)-(5)(-2)}\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{0+10}\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{7}{10} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(-1)(2)-(-5)(-3)}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2-15}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-17}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2}{17} & -\frac{5}{17} \\ \frac{3}{17} & \frac{1}{17} \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(-6)(2)-(3)(4)} \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-12-12} \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-24} \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \end{bmatrix})$$

14. ครูย้ำกับนักเรียนว่า

"1) $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ใช้ได้เฉพาะเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติ 2 x 2 เท่านั้น

2) การหา A^{-1} ควรตรวจสอบทุกครั้งว่า $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$ หรือไม่ เมื่อ A เป็น 2x2 เมทริกซ์"

15. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 2.3 ในหนังสือเรียน หน้า 163

ขั้นสรุป

ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- นิยามของเมทริกซ์ผกผันคืออะไร

  (แนวตอบ $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$)

- วิธีการหาเมทริกซ์ผกผัน 2x2 มิติ หาได้อย่างไร

  (แนวตอบ ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $ad - cb \neq 0$ แล้ว A มีเมทริกซ์ผกผัน

และ $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$)

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) เมทริกซ์ผกผัน	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 2.3 - ตรวจ Exercise 2.3	- แบบฝึกทักษะ 2.3 - Exercise 2.3	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

4) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เมทริกซ์

5) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เมทริกซ์

แหล่งการเรียนรู้

1) ห้องสมุด

2) แหล่งชุมชน

3) อินเทอร์เน็ต

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 17

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง เมทริกซ์ **จำนวน 20 ชั่วโมง**

เรื่อง ดีเทอร์มิแนนต์ **จำนวน 4 ชั่วโมง**

ผู้สอน นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล **โรงเรียนสตรีศึกษา**

ผลการเรียนรู้

10) เข้าใจความหมาย หาผลลัพธ์ของการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์ และหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยนหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ n x n เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสาม

11) หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ 2 x 2

12) แก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผันและการดำเนินการตามแถว

จุดประสงค์การเรียนรู้

8) หาดีเทอร์มิแนนต์ เมทริกซ์ตัวประกอบร่วมเกี่ยว และเมทริกซ์ผูกพันได้ เมื่อกำหนดเมทริกซ์ n x n เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสาม

9) ให้เหตุผลในการหาดีเทอร์มิแนนต์ เมทริกซ์ตัวประกอบร่วมเกี่ยว และเมทริกซ์ผูกพันได้ เมื่อกำหนดเมทริกซ์ n x n เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสาม (P)

10) มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ดีเทอร์มิแนนต์

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

ดีเทอร์มิแนนต์จะหาได้ 2 วิธี ได้แก่ การใช้บทนิยามโดยการกระจายตามแถว หรือกระจายตามหลัก และการต่อหลักที่ 1 และ 2 แล้วคูณทแยง สำหรับ 3×3 เมทริกซ์ และการหาเมทริกซ์ผูกพันหาได้โดยการหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ตัวประกอบร่วมเกี่ยว

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร	1. มีวินัย

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
2. ความสามารถในการคิด 8) ทักษะการปรับโครงสร้าง 9) ทักษะการตีความ 10) ทักษะกระบวนการคิดแก้ปัญหา 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้

📖 **แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : นิรนัย (Deductive Method)**

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

กำหนดขอบเขตขอปัญหา

4. ครูทบทวนความรู้ เรื่อง การผลลัพธ์ของการบวกของเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์ การหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน และหาเมทริกซ์ผกผันของ 2x2 และถามนักเรียน ดังนี้

a. เมทริกซ์สองเมทริกซ์จะบวกกันได้อย่างไร

(**แนวตอบ** เมทริกซ์จะบวกกันได้ เมื่อ มีมิติเดียวกัน คือ เมทริกซ์ที่กำหนดมีจำนวนแถวเท่ากันและมีจำนวนหลักเท่ากัน แล้วนำสมาชิกที่อยู่ในแถวและหลักเดียวกันของทั้งสองเมทริกซ์มาบวกกัน)

b. ค่าคงตัวคูณกับเมทริกซ์ ได้อย่างไร

(**แนวตอบ** นำค่าคงตัวไปคูณกับสมาชิกแต่ละตัวในเมทริกซ์)

c. เมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ B จะคูณกันได้อย่างไร

(**แนวตอบ** เมทริกซ์ A คูณกับเมทริกซ์ B จะคูณกันได้ ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B)

- นิยามของเมทริกซ์ผกผันคืออะไร

(**แนวตอบ** $\mathrm{AA^{-1}} = \mathrm{A^{-1}A} = \mathrm{I_n}$)

- วิธีการหาเมทริกซ์ผกผัน 2x2 มิติ หาได้อย่างไร

(**แนวตอบ** ถ้า $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $ad - cb \neq 0$ แล้ว A มีเมทริกซ์ผกผัน และ $\mathrm{A^{-1}} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$)

5. ครูแจ้งนักเรียนในหัวข้อนี้ นักเรียนจะได้ศึกษาการหาดีเทอร์มิแนนต์ของ $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ เมทริกซ์ เมื่อ n

เป็นจำนวนนับไม่เกินสาม

ขั้นสอน

แสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

16. ครูอธิบายบทนิยามของดีเทอร์มิแนนท์ว่า

กำหนดให้ $A=[a]_{1\times1}$ เรียก a ว่าดีเทอร์มิแนนต์ (determinant) ของ A หรือ det (A)

17. ครูบอกบทนิยามของไนเนอร์ว่า ให้ $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ เมื่อ $n\geq 2$ ไมเนอร์ (minor) ของ a_{ij} คือ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของ A เขียนแทนไมเนอร์ของ a_{ij} ด้วย $M_{ij}(A)$

18. ครูให้นักศึกษาตัวอย่างที่ 20 ในหนังสือเรียน หน้า 164 แล้วให้นักเรียนแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ

จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $M_{11}(A)$ ตัดแถวใด หลักใด และมีค่าเท่าใด
  (**แนวตอบ** $M_{11}(A)$ ตัดแถว 1 หลัก 1 และมีค่า 5)
- $M_{12}(A)$ ตัดแถวใด หลักใด และมีค่าเท่าใด
  (**แนวตอบ** $M_{12}(A)$ ตัดแถว 1 หลัก 2 และมีค่า 0)
- $M_{21}(A)$ ตัดแถวใด หลักใด และมีค่าเท่าใด
  (**แนวตอบ** $M_{21}(A)$ ตัดแถว 2 หลัก 1 และมีค่า -3)
- $M_{22}(A)$ ตัดแถวใด หลักใด และมีค่าเท่าใด
  (**แนวตอบ** $M_{22}(A)$ ตัดแถว 2 หลัก 2 และมีค่า 4)

จากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 165 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

19. ครูอธิบายกับนักเรียนว่า “การหาไมเนอร์ที่เพิ่งได้เรียนไปนั้นสามารถใช้ได้กับของ $n\times n$ เมทริกซ์

เมื่อ $n\geq 2$ เท่านั้น ซึ่งการหาไมเนอร์เมื่อ $n>2$ จะมีวิธีการหาในลำดับถัดไป”

20. ครูอธิบายบทนิยามของตัวประกอบร่วมเกี่ยวว่า ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ เมื่อ $n\geq 2$ ตัวประกอบร่วมเกี่ยว

(cofactor) ของ a_{ij} คือ ผลคูณของ $(-1)^{i+j}$ และ $M_{ij}(A)$ เขียนแทนตัวประกอบร่วมเกี่ยวของ a_{ij} ด้วย $C_{ij}(A)$

ใช้ทฤษฎี หลักการ

21. ครูและนักเรียนร่วมกันศึกษาตัวอย่างที่ 21 ในหนังสือเรียน หน้า 165 จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน

ดังนี้

a. $C_{11}(A)$ หาได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(**แนวตอบ** หาได้ $M_{11}(A)$ และมีค่า 8)

b. $C_{12}(A)$ หาได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(**แนวตอบ** หาได้ $-M_{12}(A)$ และมีค่า -7)

c. $C_{21}(A)$ หาได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(**แนวตอบ** หาได้ $-M_{21}(A)$ และมีค่า -6)

d. $C_{22}(A)$ หาได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(**แนวตอบ** หาได้ $M_{22}(A)$ และมีค่า 5)

จากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 166 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

22. ครูอธิบายนิยามการหาดีเทอมิแนนท์ของ $n\times n$ เมทริกซ์ เมื่อ n $\geq$ 2 ว่า ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$

เมื่อ $n\geq 2$ ดีเทอร์มิแนนท์ของ A คือ $a_{11}C_{11}(A)+a_{12}C_{12}(A)+\cdots+a_{1n}C_{1n}(A)$ เขียนแทนดีเทอร์มิแนนท์ของ A ด้วย det (A) หรือ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ และครูให้นักเรียนศึกษารายละเอียดเพิ่มเติมในหนังสือเรียน หน้า 166-167 จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

e. การหาดีเทอร์มิแนนท์ของ 2×2 เมทริกซ์ โดยกระจายตามแถวที่ i เมื่อ $i=\{1,2\}$ หรือกระจายตามหลักที่ j เมื่อ $j=\{1,2\}$ จะได้ค่าคงตัวเท่ากัน คือ เท่าใด

(แนวตอบ $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}$)

23. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 22 ในหนังสือเรียน หน้า 168 หลังจากนั้นครูนำข้อที่ 1 ในตัวอย่างที่ 22

จากหนังสือเรียน หน้า 168 มาอธิบายหน้าชั้นเรียนซ้ำอีกครั้ง พร้อมทั้งอธิบาย การเขียนไมเนอร์แต่ละตัวในการคำนวณ แล้วให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 168 เมื่อเสร็จแล้วครูสุ่มนักเรียนออกมาเขียนแสดงวิธีทำหน้าชั้นเรียน โดยมีครูและเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความถูกต้อง

24. ครูให้นักเรียนแต่ละคนศึกษาตัวอย่างที่ 23 ในหนังสือเรียน หน้า 169 หลังจากนั้นครูให้นักเรียนจับคู่

แล้วศึกษาคณิตน่ารู้ในหนังสือเรียนหน้า 169 แล้วทำ “ลองทำดู” โดยใช้วิธีการที่ศึกษาจากคณิตน่ารู้โดยให้นักเรียนแต่ละคู่ พูดคุย ซักถามกัน ในเรื่องการหาดีเทอร์มิแนนท์ จากนั้นครูทำกิจกรรมร่วมกับนักเรียน โดยครูกับนักเรียนพูดคุย ซักถามกัน จนได้ข้อสรุปว่า นักเรียนสามารถหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ได้โดยการให้ผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายบนลงมาขวาล่าง ลบกับผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายล่างขึ้นไปขวาบน

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นสอน

แสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

25. ครูอธิบายทฤษฎีบทที่ 1 กับนักเรียนว่า ให้ A และ B เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ det(AB) = det(A)det(B)

26. ครูให้นักเรียนศึกษาการหาดีเทอร์มิแนนต์ของ 3×3 เมทริกซ์ ในหนังสือเรียน หน้า 170 จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

f. การหาดีเทอร์มิแนนต์ของ A โดยใช้บทนิยามมีกี่ขั้นตอนอะไรบ้าง

(**แนวตอบ** การหาดีเทอร์มิแนนต์ของ A โดยใช้บทนิยามมี 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 นำหลักที่ 1 และหลักที่ 2 ของ A มาเขียนต่อจากหลักที่ 3 ของ A

ขั้นที่ 2 หาผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายบนมาขวาล่าง

ขั้นที่ 3 หาผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายล่างขึ้นไปขวาบน

ขั้นที่ 4 นำผลบวกของผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายบนลงมาขวาล่างลบด้วยผลบวกของผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายล่างขึ้นไปขวาบน จะได้ผลลัพธ์เป็น det(A))

ใช้ทฤษฎี หลักการ

27. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 24 ในหนังสือเรียนหน้า 172 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเองพร้อมทั้งทำความเข้าใจร่วมกัน จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

g. การหาดีเทอร์มิแนนต์ของ A หาได้อย่างไร

(**แนวตอบ** หาได้ 2 วิธี ได้แก่ โดยใช้บทนิยาม หรือ การต่อหลักที่ 1 และ 2 แล้วคูณทแยง)

จากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 169 เมื่อเสร็จแล้วครูสุ่มนักเรียนออกมาเขียนแสดงวิธีทำหน้าชั้นเรียน โดยมีครูและเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความถูกต้อง

(**แนวคำตอบ** $\begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \\ -7 & 11 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 & -5 \\ -7 & 11 \\ 2 & 1 \end{matrix}$ det(A) = (0-10+0) - (0+0+315) = 325)

28. ครูให้นักเรียนทำ ใบงานที่ 2.2 เป็นการบ้าน

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นสอน

แสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

29. ครูกล่าวว่า นักคณิตศาสตร์ได้แบ่งประเภทของเมทริกซ์จัตุรัส โดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์ จากนั้นครูอธิบายบทนิยามกับนักเรียนว่า กำหนด A เป็น $\mathbf{n \times n}$ เมทริกซ์

h. A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix) เมื่อ det(A) = 0

i. A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (non-singular matrix) เมื่อ det(A) ≠ 0

ใช้ทฤษฎี หลักการ

30. ครูให้นักเรียนแต่ละคนศึกษาตัวอย่างที่ 25 ในหนังสือเรียน หน้า 173 หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” โดยให้นักเรียนแต่ละคู่ พูดคุย ซักถามกัน ในเรื่องการหาดีเทอร์มิแนนท์และเมทริกซ์สลับเปลี่ยนจากตัวอย่างที่ 25 จากนั้นครูทำกิจกรรมร่วมกับนักเรียน โดยครูกับนักเรียนพูดคุย ซักถามกัน จนได้ข้อสรุปว่า “จากตัวอย่างที่ 25 ข้อ ที่ จะเห็นว่า det(A) = det($\mathbf{A}^t$) และข้อ 2 จะเห็นว่าเมทริกซ์ B เกิดจากการนำ 2 คูณสมาชิกทุกตัวในแถวที่ 2 ของเมทริกซ์ A ดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ B ที่ได้เท่ากับ 2det(A) และเมทริกซ์ C

เกิดจากการนำ -3 คูณสมาชิกทุกตัวในหลักที่ 1 ของเมทริกซ์ A ดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ C ที่ได้เท่ากับ –det(A)”

31. ครูให้นักเรียนคู่เดิมศึกษาตัวอย่างที่ 26 ในหนังสือเรียนหน้า 174 หลังจากนั้นครูอธิบายเพิ่มเติมว่า “จากตัวอย่างที่ 26 จะเห็นว่าเมทริกซ์ B เกิดจากการสลับแถวที่ 1 กับ 2 ของเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ C ได้มาจากการสลับหลักที่ 2 กับ 3 ของเมทริกซ์ A ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ B และดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ C ที่ได้เท่ากับจำนวนตรงข้ามของดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A” จากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนหน้า 174 เมื่อเสร็จแล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

32. ครูให้นักเรียนแต่ละคนศึกษาตัวอย่างที่ 27 หน้า 174 หลังจากนั้นครูอธิบายกับนักเรียนว่า “จากตัวอย่างที่ 27 จะเห็นว่าเมทริกซ์ B เกิดจากการนำ 2 คูณสมาชิกทุกตัวในแถวที่ 2 แล้วนำผลคูณบวกกับสมาชิกทุกตัวในแถวที่ 1 ที่เป็นหลักเดียวกันของเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ C เกิดจากการนำ -2 คูณสมาชิกทุกตัวในหลักที่ 1 แล้วนำผลคูณบวกกับสมาชิกทุกตัวในหลักที่ 2 ที่เป็นแถวเดียวกันของเมทริก A ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A เมทริกซ์ B และเมทริกซ์ C มีค่าเท่ากัน” จากนั้นครูให้นักเรียนคู่ทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนหน้า 174 เมื่อเสร็จแล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

33. ครูและนักเรียนร่วมกันศึกษาสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์ หลังจากนั้นครูให้นักเรียนนำสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์มาศึกษาตัวอย่างที่ 28 ในหนังสือเรียน หน้า 176 จากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียนหน้า 176 เมื่อเสร็จแล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

34. ครูให้นักเรียนศึกษาแนวข้อสอบ PAT1 ในหนังสือเรียน หน้า 177 เป็นการบ้าน

ชั่วโมงที่ 4

ขั้นสอน

แสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

35. ครูอธิบายบทนิยามของเมทริกซ์ผูกพันกับนักเรียนว่า ให้ A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ $n \geq 2$ เมทริกซ์ผูกพัน (adjoint matrix) ของ A คือ เมทริกซ์ $\left[C_{ij}(A)\right]^t$ เขียนแทนเมทริกซ์ผกพันของ A ด้วย adj(A) และอธิบายเพิ่มเติมว่า “จากบทนิยามนักเรียนจะเห็นว่า เมทริกซ์ผูกพันเป็นเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ตัวประกอบร่วมเกี่ยวของเมทริกซ์นั้น”

ใช้ทฤษฎี หลักการ

36. ครูให้นักเรียนจับคู่แล้วให้นักเรียนแค่ละคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 29 ในหนังสือเรียน หน้า 178 โดยให้นักเรียนแต่ละคู่ พูดคุย ซักถามกัน ในเรื่องการหาเมทริกซ์ผูกพัน แล้วถามคำถามนักเรียน ดังนี้

j. เมทริกซ์ผูกพันจะหาได้อย่างไร

(**แนวตอบ** หาได้โดยการนำเมทริกซ์ตัวประกอบร่วมเกี่ยวมาสลับเปลี่ยน)

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนแต่ละคู่ทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 179

37. ครูอาจะบอกกันนักเรียนว่า “เนื่องจากการหาเมทริกซ์ผูกพันนั้นค่อนข้างมีหลายขั้นตอนและมีโอกาสที่จะคิดผิดพลาดได้ ดังนั้นขอให้นักเรียนตั้งใจทำ ค่อย ๆ คิดไปทีละขั้นตอน” โดยในระหว่างการทำกิจกรรมครูคอยแนะนำและดูว่ามีนักเรียนคู่ไหนมีข้อสงสัยหรือไม่

38. เมื่อนักเรียนทุกคู่ทำกิจกรรมเสร็จแล้ว ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มผลัดกันพูดคำตอบของตนแล้วตรวจเช็คว่าได้คำตอบตรงกับเพื่อนไหม ถ้าไม่ตรงกันให้นักเรียนคู่อื่นช่วยตรวจสอบข้อผิดพลาดของเพื่อนพร้อมทั้งอธิบายซึ่งกันและกันจนเป็นที่เข้าใจร่วมกัน

39. ครูสรุป จากตัวอย่างที่ 29 ในหนังสือเรียน หน้า 179 จะเห็นว่า Aadj(A) = adj(A)A = $\mathrm{I}_3\det(A)$ ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทที่ 2 และ 3 ว่า ให้ A เป็น $n\times n$ เมทริกซ์ เมื่อ $n\geq 2$ จะได้ว่า

- $\mathrm{Aadj}(A) = \mathrm{adj}(A)A = \det(A)\mathrm{I}_n$
- A มีอินเวอร์สการคูณ ก็ต่อเมื่อ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานในกรณี det(A) ≠ 0

จะได้ว่า $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$ ถ้า det(A) ≠ 0 แล้ว $\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}$

หลังจากนั้น ครูให้นักเรียนแต่ละคนศึกษาตัวอย่างที่ 30 ในหนังสือเรียน หน้า 180 โดย ครูย้ำกับนักเรียนว่า “ตรวจสอบดีเทอร์มิแนนต์ก่อนหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน” ตามทฤษฎีบทที่ 3

ขั้นสรุป

ตรวจสอบและสรุป

1. ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

   k. ดีเทอร์มิแนนต์หาได้อย่างไร

   (**แนวตอบ** หาได้ 2 วิธี ได้แก่ ใช้บทนิยาม หรือ การต่อหลักที่ 1 และ 2 แล้วคูณทแยง)

   l. การหาดีเทอร์มิแนนต์ของ A โดยใช้วิธีการคูณทแยงมีกี่ขั้นตอนอะไรบ้าง

   (**แนวตอบ** การหาดีเทอร์มิแนนต์ของ A โดยใช้วิธีการคูณทแยงมี 4 ขั้นตอน ดังนี้

   ขั้นที่ 1 นำหลักที่ 1 และหลักที่ 2 ของ A มาเขียนต่อจากหลักที่ 3 ของ A

   ขั้นที่ 2 หาผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายบนมาขวาล่าง

   ขั้นที่ 3 หาผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายล่างขึ้นไปขวาบน

ขั้นที่ 4 นำผลบวกของผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายบนลงมาขวาล่างลบด้วยผลบวกของผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายล่างขึ้นไปขวาบน จะได้ผลลัพธ์เป็น det(A))

m. เมทริกซ์ผูกพันจะหาได้อย่างไร

(**แนวตอบ** หาเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ตัวประกอบร่วมเกี่ยว)

ฝึกปฏิบัติ

2. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 2.4 ในหนังสือเรียน หน้า 181-182

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) ดีเทอมิแนนต์	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 2.4 - ตรวจ Exercise 2.4 - ตรวจใบงานที่ 2.2 เรื่อง ดีเทอร์มิแนนต์ 3x3	- แบบฝึกทักษะ2.4 - Exercise 2.4 - ใบงานที่ 2.2 เรื่อง ดีเทอร์มิแนนต์ 3x3	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

6) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เมทริกซ์

7) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เมทริกซ์

8) ใบงานที่ 2.2 เรื่อง ดีเทอร์มิแนนต์ 3x3

แหล่งการเรียนรู้

1) ห้องสมุด

2) แหล่งชุมชน

3) อินเทอร์เนต

ใบงานที่ 2.2

เรื่อง ดีเทอร์มิแนนท์ 3x3

<u>คำชี้แจง</u> : จงแสดงวิธีทำ

กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2 & -4 & -1\\ -1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & -2\end{bmatrix}$ และ $C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$

จงหา det(A), det(B) และ det(C)

ใบงานที่ 2.2

เรื่อง ดีเทอร์มิแนนท์ 3x3

เฉลย

<u>คำชี้แจง</u> : จงแสดงวิธีทำ

กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2 & -4 & -1\\ -1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & -2\end{bmatrix}$ และ $C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$

จงหา det(A), det(B) และ det(C)

$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> $\begin{vmatrix}1 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 4\\ 2 & 1\\ 4 & 3\end{matrix}$

det(A) = (2+48+18) - (12+9+16) = 31

$B=\begin{bmatrix}-2 & -4 & -1\\ -1 & -2 & -1\\ 1 & -2 & -2\end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> $\begin{vmatrix}-2 & -4 & -1\\ -1 & -2 & -1\\ 1 & -2 & -2\end{vmatrix}\begin{matrix}-2 & -4\\ -1 & -2\\ 1 & -2\end{matrix}$

det(A) = (-8+4-2) - (2-4-8) = -6-10 = -16

$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> $\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 0\\ -2 & 2\\ 1 & 4\end{matrix}$

det(A) = (6+0+-8) - (4+4+0) = -2-8 = -10

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 18

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง เมทริกซ์ **จำนวน 20 ชั่วโมง**

เรื่อง การใช้เมทริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น **จำนวน 5 ชั่วโมง**

ผู้สอน นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล **โรงเรียนสตรีศึกษา**

ผลการเรียนรู้

13) เข้าใจความหมาย หาผลลัพธ์ของการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์ และหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยนหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ n x n เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสาม

14) หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ 2 x 2

15) แก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผันและการดำเนินการตามแถว

จุดประสงค์การเรียนรู้

11) ใช้เมทริกซ์ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้ (K)

12) ให้เหตุผลในการใช้เมทริกซ์หาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้ (P)

13) มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

สมการเชิงเส้นและระบบสมการเชิงเส้น

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ ซึ่งมีหลายวิธี ได้แก่ การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์ และการแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้การดำเนินการตามแถว

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 11) ทักษะการปรับโครงสร้าง	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
12) ทักษะการตีความ 13) ทักษะกระบวนการคิดแก้ปัญหา 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	

กิจกรรมการเรียนรู้

📖 **แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : นิรนัย (Deductive Method)**

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

กำหนดขอบเขตขอปัญหา

6. ครูทบทวนความรู้เดิม เรื่อง การแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยถามคำถามนักเรียน ดังนี้

a. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นทำได้อย่างไร

(**แนวตอบ** นักเรียนสามารถตอบได้หลากหลายแล้วแต่ความถนัดของนักเรียนแต่ละคน เช่น การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยการแทนค่าหรือการกำจัดตัวแปร เป็นต้น)

7. ครูนำเข้าสู่บทเรียนโดยพูดกับนักเรียนว่า “ในหัวข้อนี้จะได้ศึกษาการแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ ซึ่งมีหลายวิธี ดังนี้ 1) การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน 2) การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์ และ 3) การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้การดำเนินการตามแถว”

ขั้นสอน

แสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

40. ครูให้นักเรียนศึกษา การแก้สมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผันประมาณ 5 นาที

41. ครูอธิบายการแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน ในหนังสือเรียน หน้า 183-184 ว่า เมื่อกำหนดระบบสมการเชิงเส้นที่มี m สมการ และ n ตัวแปร ดังนี้

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

สามารถเขียนสมการเมทริกซ์ที่สัมพันธ์กับระบบสมการได้เป็น

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}_{X} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{B}$$

ถ้า m = n และ det(A) ≠ 0 แล้ว $X = A^{-1}B$

ใช้ทฤษฎี หลักการ

42. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 31 ในหนังสือเรียน หน้า 184 แล้วแลกเปลี่ยนข้อสงสัยกับเพื่อน ๆ ซักถาม

จนเป็นที่เข้าใจร่วมกัน แล้วครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- สมาชิกของเมทริกซ์ A ในหลักที่ 1 มาจากที่ใด

  (**แนวตอบ** สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร x ของระบบสมการที่กำหนด)

- สมาชิกของเมทริกซ์ A ในหลักที่ 2 มาจากที่ใด

  (**แนวตอบ** สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร y ของระบบสมการที่กำหนด)

จากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 184 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

(**แนวคำตอบ** A X B

จากโจทย์จะได้ $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \end{bmatrix}$

จะได้ dat(A) = (-1)(3) – (-2)(4) = 5

นั่นคือ $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

จะได้ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} - \frac{18}{5} \\ \frac{-4}{5} + \frac{9}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{15}{5} \\ \frac{5}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการที่กำหนด คือ (-3,1))

43. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 32 ในหนังสือเรียน หน้า 184-185 แล้วแลกเปลี่ยนข้อสงสัยกับ

คู่ของตนเองและซักถามจนเป็นที่เข้าใจร่วมกัน แล้วครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- สมาชิกของเมทริกซ์ A ในหลักที่ 1 มาจากที่ใด

  (**แนวตอบ** สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร x ของระบบสมการที่กำหนด)

- สมาชิกของเมทริกซ์ A ในหลักที่ 2 มาจากที่ใด

  (**แนวตอบ** สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร y ของระบบสมการที่กำหนด)

- สมาชิกของเมทริกซ์ A ในหลักที่ 3 มาจากที่ใด

  (**แนวตอบ** สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร z ของระบบสมการที่กำหนด)

จากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 185 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นสอน

แสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

44. ครูอธิบายกับนักเรียนเกี่ยวกับการแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์ โดยครูอธิบาย

ทฤษฎีบทที่ 4 ในหนังสือเรียน หน้า 186 ว่าเมื่อกำหนดระบบสมการเชิงเส้นที่มี n สมการ และ n ตัวแปร โดย AX=B เป็นสมการเมทริกซ์ที่สัมพันธ์กับระบบสมการนี้

$$\text{ให้ } X=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \text{ และ } B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ถ้า $\det(A) \neq 0$ แล้ว $X_1=\frac{\det(A_1)}{\det(A)}, X_2=\frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \cdots, X_n=\frac{\det(A_n)}{\det(A)}$ เมื่อ A_i คือ เมทริกซ์ที่ได้จากการแทนหลักที่ i ของ A ด้วยหลักของ B ทุก $i \in \{1,2,3,...,n\}$

ใช้ทฤษฎี หลักการ

45. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 33 ในหนังสือเรียน หน้า 186 แล้วแลกเปลี่ยนข้อสงสัยกับเพื่อน ๆ

ซักถามจนเป็นที่เข้าใจร่วมกัน แล้วครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- สมาชิกของเมทริกซ์ A ในหลักที่ 1 มาจากที่ใด

  (**แนวตอบ** สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร x ของระบบสมการที่กำหนด)

- สมาชิกของเมทริกซ์ A ในหลักที่ 2 มาจากที่ใด

  (**แนวตอบ** สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร y ของระบบสมการที่กำหนด)

จากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 187 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

(**แนวคำตอบ**

$2x+y = -2$

$3x+y= 1$

เขียนสมการเมทริกซ์ได้เป็น $AX = B$ เมื่อ

$A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}$, และ $B = \begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$

จาก $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ จะได้ $\det(A) = 1 \neq 0$

โดยกฎของคราเมอร์ จะได้ว่า $y = \frac{\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}}{\det(A)} = \frac{-6-2}{1} = -8$

$x = \frac{\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}}{\det(A)} = \frac{1-(-2)}{1} = 3$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการที่กำหนด คือ (3,-8))

46. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 34 ในหนังสือเรียน หน้า 187-188 หลังจากนั้นครูนำตัวอย่าง

ที่ 34 มาอธิบายหน้าชั้นเรียนซ้ำอีกครั้ง หลังจากนั้นครูให้นักเรียนแต่ละคู่ทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 188 โดยให้นักเรียนแต่ละคู่ พูดคุย ซักถามกัน ในเรื่องการแก้สมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์ โดยศึกษา

จาก ตัวอย่างที่ 34 โดยที่ครูคอยดูนักเรียนแต่ละคู่และให้คำแนะนำหากมีนักเรียนสงสัย และเมื่อนักเรียนทำเสร็จครูเฉลย “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 188

(แนวคำตอบ

เขียนสมการเมทริกซ์ได้เป็น AX =B เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

จะได้ det(A) = 4+1 = 5 $\neq$ 0

โดยกฎของคราเมอร์ จะได้ว่า

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \\ 8 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

$$= \frac{10}{5}$$

$$= 2$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 1 & 8 & -2 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

$$= \frac{5}{5}$$

$$= 1$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & -8 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

$$= \frac{-15}{5}$$

$$= -3$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการที่กำหนด คือ (2,1,-3))

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นสอน

แสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

47. ครูอธิบายกับนักเรียนเกี่ยวกับการแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้การดำเนินการตามแถว ในหนังสือเรียน

หน้า 188 และกล่าวว่าสิ่งแรกที่นักเรียนต้องรู้คือ เมทริกซ์แต่งเติมและการดำเนินการตามแถว”

48. ครูให้นักเรียนจับคู่และศึกษาบทนิยามของเมทริกซ์แต่งเติมและการดำเนินการตามแถวด้วยตัวเอง

โดยให้นักเรียนแต่ละคู่ พูดคุย ซักถามกัน ประมาณ 10 นาที

49. ครูอธิบายเมทริกซ์แต่งเติมและการดำเนินการตามแถว ในหนังสือเรียน หน้า 189-190 ว่า เมื่อกำหนดระบบสมการเชิงเส้นที่มี m สมการ และ n ตัวแปร ดังนี้

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

เมทริกซ์แต่งเติม (augmented matrix) ของระบบสมการนี้ คือ

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

ให้ A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ เรียกการดำเนินการตามแถว (row operation) กับเมทริกซ์ A

- สลับที่แถวที่ i และ j ของ A เขียนแทนด้วย R_{ij}
- คูณสมาชิกในแถวที่ i ด้วยค่าคงตัว c โดยที่ c ≠ 0 เขียนแทนด้วย cR_i
- เปลี่ยนแถวที่ i ของ A โดยนำค่าคงตัว c โดยที่ c ≠ 0 คูณสมาชิกในแถวที่ j(j ≠ i) แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ i เขียนแทนด้วย $R_i + cR_j$

ให้ A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ กล่าวว่า A เป็นรูปแบบขั้นบันไดแบบแถว (row-echelon from) เมื่อ A มีสมบัติต่อไปนี้

1) ถ้า A มีแถวที่มีสมาชิกบางตัวไม่เท่ากับ 0 แล้วสมาชิกตัวแรกจากซ้ายในแนวขวา ที่ไม่ใช่ 0

ต้องเป็น 1 เรียก 1 ตัวนี้ว่า 1 ตัวนำ (leading 1) ในแถว

2) ถ้า A มีแถวที่มีสมาชิกทุกตัวในแถวเท่ากับ 0 แล้วแถวเหล่านี้ต้องอยู่ด้านล่างของแถวที่มีสมาชิกบางตัวไม่เท่ากับ 0

3) ถ้า a_{ij} เป็น 1 ตัวนำในแถวที่ i และ $a_{(i+1)k}$ เป็น 1 ตัวนำในแถวที่ i + 1 แล้ว j < k

ถ้าเมทริกซ์ B ได้จากเมทริกซ์ A โดยการดำเนินการตามแถวแล้วจะกล่าวว่า B สมมูลแบบแถว (row equivalent) กับ A เขียนแทน B สมมูลแบบแถวกับ A ด้วย $\mathbf{A} \square \mathbf{B}$

ใช้ทฤษฎี หลักการ

50. ครูและนักเรียนร่วมกันศึกษาตัวอย่างที่ 35 จากนั้นให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 190-191 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

(**แนวคำตอบ** จากระบบสมการข้างต้น เขียนเมทริกซ์แต่งเติมได้ ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & -7 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -21 \\ 1 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \frac{-7}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 7 & 1 & -16 \\ 1 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \frac{-7}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 7 & 1 & -16 \\ 0 & 6 & \frac{13}{3} & \frac{11}{3} \end{array}\right] \qquad \frac{R_1}{3}, \; R_3 - R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \frac{-7}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{-59}{3} \\ 0 & 6 & \frac{13}{3} & \frac{11}{3} \end{array}\right] \qquad R_2 - R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-17}{3} & \frac{-55}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{-59}{3} \\ 0 & 0 & \frac{73}{3} & \frac{365}{3} \end{array}\right] \qquad R_1 + R_2, \; R_3 - 6R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-17}{3} & \frac{-55}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{-59}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \qquad \frac{3}{73} R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} R_1 + \frac{17}{3}R_3 \\ R_2 + \frac{10}{3}R_3 \end{array}$$

จะได้ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$ เป็นเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการ

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการที่กำหนด คือ (10,-3,5))

ชั่วโมงที่ 4

ขั้นสอน

แสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

51. ครูบอกนักเรียนว่า “ในหัวข้อ 2.1 นักเรียนได้ทราบมาแล้วว่า คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นมี 3 ลักษณะ คือ 1) ระบบสมการเชิงเส้นที่มีคำตอบเดียว 2) ระบบสมการเชิงเส้นที่มีหลายคำตอบหรือเรียกว่ามีคำตอบอนันต์ 3) ระบบสมการเชิงเส้นที่ไม่มีคำตอบ เมื่อใช้วิธีการดำเนินการตามแถวกับเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเชิงเส้น จะสามารถบอกได้ว่าระบบสมการเชิงเส้นที่กำหนดมีคำตอบหรือไม่มีคำตอบ และในกรณีที่มีคำตอบ จำนวนคำตอบเป็นอนันต์หรือไม่”

ใช้ทฤษฎี หลักการ

52. ครูเขียนโจทย์ของตัวอย่างที่ 36 ในหนังสือเรียน หน้า 192-193 บนกระดาน หลังจากนั้นครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4 คน แล้วกำหนดเลขประจำตัวนักเรียนเป็น 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ ให้นักเรียนศึกษา ตัวอย่างที่ 36 ในหนังสือเรียน หน้า 192 เป็นเวลา 7 นาที จากนั้นให้นักเรียนในกลุ่มช่วยกันหาคำตอบของกิจกรรม “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 193 เมื่อนักเรียนในแต่ละกลุ่มทำเสร็จแล้ว ครูสุ่มเรียกเลขหมายใดก็ได้ให้ตอบคำถาม ซึ่งนักเรียนที่ถูกเรียกต้องสามารถตอบได้ พร้อมทั้งอธิบายวิธีทำได้ (เพราะนักเรียนในกลุ่มต้องร่วมกันคิดและต้องทำความเข้าใจให้ตรงกัน) แต่จะผิดหรือถูก ครูจะยังไม่เฉลย แต่จะสุ่มเรียกทุกกลุ่มในคำถามเดียวกัน เพื่อให้นักเรียนได้ตรวจสอบคำตอบและวิธีทำ ครูสุ่มถามนักเรียนทุกกลุ่มจนได้คำตอบเดียวกัน และครูอธิบายคำตอบดังนี้

จากระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น เขียนเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 & 2 & 19 \\ -1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & -3 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & 7 & 1 & 4 & 20 \\ 0 & 6 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & -3 & -7 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \to R_1 + R_2 \\ \\ R_2 \to R_2 + R_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & 7 & 1 & 4 & 20 \\ 0 & 6 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 7 & -8 & -11 & -13 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 \to R_3 + R_1 \\ R_4 \to R_4 + 2R_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 6 & 22 \\ 0 & 6 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 7 & -8 & -11 & -13 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ R_2 \to R_2 - R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & -22 & -69 \\ 0 & 1 & 1 & 6 & 22 \\ 0 & 0 & -6 & -38 & -134 \\ 0 & 0 & -15 & -53 & -167 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \to R_1 - 3R_2 \\ \\ \\ R_3 \to R_3 - 6R_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & -22 & -69 \\ 0 & 1 & 1 & 6 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{3} & \frac{67}{3} \\ 0 & 0 & -15 & -53 & -167 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 \to \frac{R_3}{-6} \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 16 & 65 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{3} & \frac{67}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -53 & -167 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \to R_1 - 6R_3 \\ \\ R_2 \to R_2 - R_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 16 & 65 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{3} & \frac{67}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ R_4 \to \frac{R_4}{14} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \to R_1 - 16R_3 \\ R_2 \to R_2 - \frac{R_4}{3} \\ R_3 \to R_3 - \frac{19R_4}{3} \end{array}$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการที่กำหนด คือ (1,1,-3,4)

53. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 37 แล้วทำ “ลองทำดู” ในเรียน หน้า 194 และตัวอย่างที่ 38 ในหนังสือเรียน หน้า 193 แล้วทำ “ลองทำดู” ในเรียน หน้า 195

(**แนวคำตอบ** จากระบบสมการข้างต้น เขียนเมทริกซ์แต่งเติมได้ ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & 6 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 + R_2 \\ \\ R_2 - 3R_3 \end{array}$$)

54. ครูอธิบายกับนักเรียนว่า “จากตัวอย่างที่ 38 จะเห็นว่า ถ้าได้เมทริกซ์ที่มีแถวหนึ่งในรูป $[0\ 0\ 0\ \ldots : C]$ จะได้ว่าระบบสมการเชิงเส้นไม่มีคำตอบ นอกจากนี้ เมทริกซ์แต่งเติมและการดำเนินการตามแถวจะช่วยแก้ระบบสมการเชิงเส้นได้แล้วยังสามารถใช้หาเมทริกซ์ผกผันได้” จากนั้นครูให้นักเรียนศึกษารายละเอียดเพิ่มเติมอย่างละเอียด ในหนังสือเรียน หน้า 196-197

55. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 39 ในหนังสือเรียน หน้า 197 หลังจากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 197

(แนวคำตอบ เนื่องจาก det(A) = 43 $\neq$ 0 จะได้ว่าสามารถหา A^{-1} หาค่าได้)

$$[A|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 7 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 10 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 10 & 1 & 1 \\ 0 & 43 & 4 & 5 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 10 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{43} & \frac{5}{43} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{43} & -\frac{7}{43} \\ 0 & 1 & \frac{4}{43} & \frac{5}{43} \end{array}\right]$$

ดังนั้น A^{-1} คือ $\begin{bmatrix} \frac{3}{43} & -\frac{7}{43} \\ \frac{4}{43} & \frac{5}{43} \end{bmatrix}$)

56. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 2.5 ในหนังสือเรียน หน้า 198-199 เป็นการบ้าน

ชั่วโมงที่ 5

ขั้นสอน

ใช้ทฤษฎี หลักการ

57. ครูบอกกับนักเรียนว่า “นอกจากเมทริกซ์จะสามาการนำมาช่วยแก้สมการได้แล้ว ยังสามารถนำมาวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าได้อีกด้วย” จากนั้นครูให้นักเรียนทำกิจกรรม “คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง” ในหนังสือเรียน หน้า 200 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูเฉลยกิจกรรม “คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง”

(**แนวคำตอบ** จากระบบสมการข้างต้นจะได้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4}{6} & \frac{5}{6} \\ 4 & 7 & 5 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4}{6} & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{26}{6} & \frac{10}{6} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4}{6} & \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & \frac{5}{13} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{45}{78} \\ 0 & 1 & \frac{5}{13} \end{array}\right]$$

ดังนั้น กระแสที่ไหลผ่าน I_1 และ I_2 คือ $\frac{45}{78}$ และ $\frac{5}{13}$ ตามลำดับ)

ขั้นสรุป

ตรวจสอบและสรุป

1. ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- การแก้ระบบสมการเชิงเส้นทำได้อย่างไร

(**แนวตอบ** นักเรียนสามารถตอบได้หลากหลายขึ้นอยู่กับความรู้พื้นฐานของนักเรียนแต่ละคน เช่น การกำจัดตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง เป็นต้น)

- เมทริกซ์ที่เท่ากันเป็นอย่างไร

(**แนวตอบ** มีสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเหมือนกัน และมีมิติเดียวกัน)

- เมทริกซ์สลับเปลี่ยนเป็นอย่างไร

(**แนวตอบ** สลับแถวและหลักกัน)

- เมทริกซ์สองเมทริกซ์จะบวกกันได้อย่างไร

(**แนวตอบ** เมทริกซ์จะบวกกันได้ เมื่อ มีมิติเดียวกัน คือ เมทริกซ์ที่กำหนดมีจำนวนแถวเท่ากัน และมีจำนวนหลักเท่ากัน แล้วนำสมาชิกที่อยู่ในแถวและหลักเดียวกันของทั้งสองเมทริกซ์มาบวกกัน)

- ค่าคงตัวคูณกับเมทริกซ์ ได้อย่างไร

(**แนวตอบ** นำค่าคงตัวไปคูณกับสมาชิกแต่ละตัวในเมทริกซ์)

- เมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ B จะคูณกันได้อย่างไร
- (**แนวตอบ** เมทริกซ์ A คูณกับเมทริกซ์ B จะคูณกันได้ ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของ A เท่ากับ จำนวนแถวของ B)

- นิยามของเมทริกซ์ผกผันคืออะไร

(**แนวตอบ** $\mathrm{AA^{-1}} = \mathrm{A^{-1}A} = \mathrm{I_n}$)

- วิธีการหาเมทริกซ์ผกผัน 2x2 มิติ หาได้อย่างไร

(แนวตอบ ถ้า $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $ad - cb \neq 0$ แล้ว A มีเมทริกซ์ผกผัน

และ $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$)

n. ดีเทอร์มิแนนต์หาได้อย่างไร

(**แนวตอบ** หาได้ 2 วิธี ได้แก่ ใช้บทนิยาม หรือ การต่อหลักที่ 1 และ 2 แล้วคูณทแยง)

o. การหาดีเทอร์มิแนนต์ของ A โดยใช้วิธีการคูณทแยงมีกี่ขั้นตอนอะไรบ้าง

(**แนวตอบ** การหาดีเทอร์มิแนนต์ของ A โดยใช้วิธีการคูณทแยงมี 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 นำหลักที่ 1 และหลักที่ 2 ของ A มาเขียนต่อจากหลักที่ 3 ของ A

ขั้นที่ 2 หาผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายบนมาขวาล่าง

ขั้นที่ 3 หาผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายล่างขึ้นไปขวาบน

ขั้นที่ 4 นำผลบวกของผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายบนลงมาขวาล่างลบด้วยผลบวกของผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายล่างขึ้นไปขวาบน จะได้ผลลัพธ์เป็น det(A))

p. เมทริกซ์ผูกพันจะหาได้อย่างไร

(**แนวตอบ** หาเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ตัวประกอบร่วมเกี่ยว)

- การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์มีกี่วิธี อะไรบ้าง

(**แนวคำตอบ** 3 วิธี ได้แก่ 1) การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน

2) การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์

3) การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้การดำเนินการตามแถว)

ฝึกปฏิบัติ

2. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 2.2 ในหนังสือเรียน หน้า 205

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) ระบบสมการเชิงเส้น	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 2.5 - ตรวจ Exercise 2.5	- แบบฝึกทักษะ 2.5 - Exercise 2.5	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

9) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เมทริกซ์

10) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เมทริกซ์

แหล่งการเรียนรู้

1) ห้องสมุด
2) แหล่งชุมชน
3) อินเทอร์เน็ต

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 19

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ **จำนวน 19 ชั่วโมง**

เรื่อง ระบบพิกัดฉากสามมิติ **จำนวน 2 ชั่วโมง**

ผู้สอน นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล **โรงเรียนสตรีศึกษา**

ผลการเรียนรู้

40) หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ หาผลคูณเชิงสเกลาร์ และผลคูณเชิงเวกเตอร์

41) นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

49) สามารถบอกพิกัดของจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติได้ (K)

50) สามารถหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติได้ (K)

51) สามารถวาดรูปพิกัดฉากสามมิติได้ (P)

52) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ระบบพิกัดฉาก

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

ระบบพิกัดฉากสามมิติ เป็นระบบที่มีการกำหนดให้มีเส้นตรงสามเส้น แต่ละเส้นตัดกันที่จุดกำเนิด เรียกเส้นตรงทั้งสามเส้นว่า แกน X แกน Y และแกน Z โดยการกำหนดแกนในระบบพิกัดฉากสามมิติ จะเขียนโดยยึดหลักมือซ้าย และมือขวา

การหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติใช้สูตรเดียวกันกับระบบพิกัดฉากสองมิติ คือ ระยะทางระหว่างจุด $P(x_1,y_1)$ และ $Q(x_2,y_2)$ ในระบบพิกัดฉากสองมิติ ใช้สูตร $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

ระยะทางระหว่างจุด $P(x_1,y_1,Z_1)$ และ $Q(x_2,y_2,Z_2)$ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ ใช้สูตร

$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 14) ทักษะการเชื่อมโยง 15) ทักษะการคิดคล่อง 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้

แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching

ชั่วโมงที่ 1

นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ระบบจำนวนเต็ม

ขั้นนำ

ขั้นการใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

9. ครูกล่าวทักทายกับนักเรียน แล้วแจ้งผลการเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

10. ครูกระตุ้นความสนใจของนักเรียน โดยให้นักเรียนดูภาพหน้าหน่วย จากนั้นครูถามคำถามนักเรียนว่า “อยากทราบว่าวัดโพธิ์อยู่ห่างจากป้ายบอกทางเป็นระยะทางเท่าใด” แล้วให้นักเรียนร่วมกันตอบคำถาม

(แนวตอบ วัดโพธิ์อยู่ห่างจากป้ายบอกทาง 700 เมตร)

หมายเหตุ* ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำถาม BIG QUESTION หลังเรียนหน่วยการเรียนรู้ที่ 3

11. ครูทบทวนความรู้เดิมที่นักเรียนควรรู้ เรื่อง กราฟของคู่อันดับบนระบบพิกัดฉาก ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีมิติ 2×2 และดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีมิติ 3×3 โดยครูให้นักเรียนศึกษาควรรู้ก่อนเรียนในหนังสือเรียน หน้า 207

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

28. ครูอธิบายความรู้เกี่ยวกับระบบพิกัดฉากสามมิติ ในหนังสือเรียน หน้า 208

29. ครูให้นักเรียนยกมือซ้าย และมือขวาขึ้นมา จากนั้นให้นักเรียนงอนิ้วเหมือนรูปที่ 1 และรูปที่ 2 ในหนังสือเรียน หน้า 208

30. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาเนื้อหาในหนังสือเรียนหน้า 209 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง จากนั้นครูถามคำถาม ดังนี้

- ระบบพิกัดฉากสองมิติ แกน X และแกน Y แบ่งระนาบออกเป็นกี่ส่วน และแต่ละส่วนเรียกว่าอะไร

(**แนวตอบ** ระบบพิกัดฉากสองมิติ แกน X และแกน Y แบ่งระนาบออกเป็น 4 ส่วน และแต่ละส่วนเรียกว่า จตุภาค)

- ระบบพิกัดฉากสามมิติ แกน X แกน Y และแกน Z แบ่งระนาบออกเป็นกี่ส่วน และแต่ละส่วนเรียกว่าอะไร

(**แนวตอบ** ระบบพิกัดฉากสามมิติ แกน X แกน Y และแกน Z แบ่งระนาบออกเป็น 8 ส่วน และแต่ละส่วนเรียกว่า อัฐภาค)

31. ครูให้นักเรียนดูรูปที่ 7 ในหนังสือเรียน หน้า 210 จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันกำหนดลำดับอัฐภาค

32. ครูอธิบายความรู้เกี่ยวกับการกำหนดพิกัดของจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ ในหนังสือเรียน หน้า 210 – 212 จากนั้นครูให้นักเรียนกำหนดพิกัดของจุดของแต่ละคน เมื่อเสร็จแล้วครูสุ่มถามนักเรียนว่าพิกัดของจุดของนักเรียนอยู่ในอัฐภาคใด

33. ครูให้นักเรียนจับกลุ่ม 5 คน ศึกษาตัวอย่างที่ 1 ในหนังสือเรียน หน้า 212 และตัวอย่างที่ 2 ในหนังสือเรียน หน้า 213 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กันภายในกลุ่ม จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู”

34. ครูขอตัวแทนนักเรียนออกมาเฉลยคำตอบ “ลองทำดู” ครูและนักเรียนคนอื่น ๆ ร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นสอน

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

1. ครูกล่าวทบทวน ดังนี้

- ระบบพิกัดฉากสามมิติ เป็นระบบที่มีการกำหนดให้มีเส้นตรงสามเส้น แต่ละเส้นตัดกันที่จุดกำเนิด เรียกเส้นตรงทั้งสามเส้นว่า แกน X แกน Y และแกน Z
- ระบบพิกัดฉากสองมิติ แกน X และแกน Y แบ่งระนาบออกเป็น 4 ส่วน และแต่ละส่วนเรียกว่า

จตุภาค

- ระบบพิกัดฉากสามมิติ แกน X แกน Y และแกน Z แบ่งระนาบออกเป็น 8 ส่วน และแต่ละส่วนเรียกว่า อัฐภาค

- จุดในแต่ละอัฐภาคเขียนแทนด้วยจำนวนจริงสามจำนวน ซึ่งเป็นจำนวนบวก หรือจำนวนลบ หรือจำนวนศูนย์

2. ครูวาดรูปทรงสี่เหลี่ยมจากจุด A(2,5,4), B(0,5,4), C(0,0,4), D(2,0,4), E(2,0,0), F(2,5,0), G(0,5,0), O(0,0,0) จากนั้นครูถามคำถามดังนี้

- จุด F(2,5,0) อยู่บนระนาบใด และจุดที่อยู่ตรงข้ามกับจุด F คือจุดใด

  (แนวตอบ จุด F(2,5,0) อยู่บนระนาบ XY และจุดที่อยู่ตรงข้ามคือ จุด A(2,5,4))

3. จากคำถามครูอธิบายว่า “จุด F(2,5,0) เป็นภาพฉายของจุด A บนระนาบ XY” จากนั้นครูให้นักเรียนจับคู่หาจุดที่เป็นภาพฉายของจุด A บนระนาบ YZ และ XZ ตามลำดับ

(แนวตอบ จุด B(0,5,4) เป็นภาพฉายของจุด A บนระนาบ YZ และจุด D(2,0,4) เป็นภาพฉายของจุด A บนระนาบ YZ)

4. ครูให้นักเรียนอ่าน “คณิตน่ารู้” จากหนังสือเรียน หน้า 214 ว่า “ภาพฉายของจุดใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ เป็นเส้นตั้งฉากจากจุดนั้นกับระนาบหนึ่ง จึงทำให้จุดที่เป็นภาพฉายจะมีพิกัด X หรือพิกัด Y หรือพิกัด Z ค่าใดค่าหนึ่งเท่ากับ 0” จากนั้นครูยกตัวอย่างจุด P(2,7,3) เพื่อให้นักเรียนเข้าใจ

5. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 3 ในหนังสือเรียนหน้า 214 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง แล้วครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- ภาพฉายของจุด A(2, 3, 5) บนแกน X คือจุดใด

  (**แนวตอบ** จุด (2, 0, 0))

- ภาพฉายของจุด A(2, 3, 5) บนแกน Y คือจุดใด

  (**แนวตอบ** จุด (0, 3, 0))

- ภาพฉายของจุด A(2, 3, 5) บนแกน Z คือจุดใด

  (**แนวตอบ** จุด (0, 0, 5))

- ภาพฉายของจุด A(2, 3, 5) บนแกน XY คือจุดใด

  (**แนวตอบ** จุด (2, 3, 0))

- ภาพฉายของจุด A(2, 3, 5) บนแกน YZ คือจุดใด

  (**แนวตอบ** จุด (0, 3, 5))

- ภาพฉายของจุด A(2, 3, 5) บนแกน XZ คือจุดใด

  (**แนวตอบ** จุด (2, 0, 5))

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

6. ครูอธิบายความรู้เกี่ยวกับระยะทางระหว่างจุดสองจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ ในหนังสือเรียน หน้า 215 – 216 และครูแสดงตัวอย่างที่ 4 ให้นักเรียนดูบนกระดานดำ จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันทำ “ลองทำดู”

7. ครูแจกใบงานที่ 3.1 เรื่อง ระยะทางระหว่างจุดสองจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ ให้นักเรียนทำ จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบใบงานที่ 3.1

ขั้นลงมือทำ (Doing)

ครูให้นักเรียนจับคู่ แล้วทำแบบฝึกทักษะ 3.1 ในหนังสือเรียน หน้า 217 โดยทั้งสองคนจะต้องแบ่งกันทำ จากนั้นครูจะสุ่มตัวแทนแต่ละคู่ออกมาเฉลยคำตอบหน้าชั้นเรียน ครูและเพื่อนคนอื่น ๆ ร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง

ขั้นสรุป

ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- การแบ่งระนาบออกเป็น 8 ส่วน เรียกว่าอะไร

  (**แนวตอบ** อัฐภาค (octant))

- การหาระยะห่างระหว่างจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติหาได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** หาได้จากสูตร $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$)

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
1. การประเมินก่อนเรียน - แบบทดสอบก่อนเรียน หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ	- ตรวจแบบทดสอบก่อนเรียน	- แบบทดสอบก่อนเรียน	- ประเมินตามสภาพจริง
2. ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) ระบบพิกัดฉากสามมิติ	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 3.1 - ตรวจ Exercise 3.1 - ตรวจใบงานที่ 3.1	- แบบฝึกทักษะ 3.1 - Exercise 3.1 - ใบงานที่ 3.1	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

11) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เวกเตอร์ในสามมิติ

12) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เมทริกซ์

13) ใบงานที่ 3.1 เรื่อง ระยะทางระหว่างจุดสองจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ

แหล่งการเรียนรู้

1) ห้องสมุด
2) แหล่งชุมชน
3) อินเทอร์เน็ต

ใบงานที่ 3.1

เรื่อง ระยะทางระหว่างจุดสองจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ

<u>คำชี้แจง</u> : ให้นักเรียนแสดงวิธีการหาคำตอบโดยละเอียด

1) จงหาระยะทางระหว่างจุด A(5, -2, 1), B(2, 4, 2)

.....

.....

2) จงหาระยะทางระหว่างจุด A(-1, 3, 5), B(0, 0, 0)

.....

.....

3) จงหาระยะทางระหว่างจุด A(0, 0, 0), B(-1, 6, 1)

.....

.....

.....

.....

4) จงหาระยะทางระหว่างจุด A(4, 1, -3), B(9, 1, -3)

.....

.....

.....

.....

5) กำหนดให้จุด A(5, 5, 0), B(2, 12, 0) และ C(2, 12, 4) เป็นจุดยอดมุมของสามเหลี่ยม จงหาเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมรูปนี้

.....

.....

.....

.....

ใบงานที่ 3.1

เฉลย

เรื่อง ระยะทางระหว่างจุดสองจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ

---

1) จงหาระยะทางระหว่างจุด A(5, -2, 1), B(2, 4, 2)

<u>วิธีทำ</u> จากสูตร $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2}$

จะได้ $AB = \sqrt{(2 - 5)^2 + (4 - (-2))^2 + (2 - 1)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (6)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{9 + 36 + 1}$

$= \sqrt{46}$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด A(5, -2, 1) และ B(2, 4, 2) เท่ากับ $\sqrt{46}$

2) จงหาระยะทางระหว่างจุด A(-1, 3, 5), B(0, 0, 0)

<u>วิธีทำ</u> จากสูตร $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2}$

จะได้ $AB = \sqrt{(0 - (-1))^2 + (0 - 3)^2 + (0 - 5)^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (-5)^2}$

$= \sqrt{1 + 9 + 25}$

$= \sqrt{35}$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด A(-1, 3, 5) และ B(0, 0, 0) เท่ากับ $\sqrt{35}$

3) จงหาระยะทางระหว่างจุด A(0, 0, 0), B(-1, 6, 1)

<u>วิธีทำ</u> จากสูตร $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2}$

จะได้ $AB = \sqrt{((-1) - 0)^2 + (6 - 0)^2 + (1 - 0)^2}$

$= \sqrt{(-1)^2 + (6)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{1 + 36 + 1}$

$= \sqrt{38}$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด A(0, 0, 0) และ B(-1, 6, 1) เท่ากับ $\sqrt{38}$

4) จงหาระยะทางระหว่างจุด A(4, 1, -3), B(9, 1, -3)

<u>วิธีทำ</u> จากสูตร $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2}$

จะได้ $AB = \sqrt{(9 - 4)^2 + (1 - 1)^2 + ((-3) - (-3))^2}$

$= \sqrt{(5)^2 + (0)^2 + (0)^2}$

$= \sqrt{25 + 0 + 0}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด A(4, 1, -3) และ B(9, 1, -3) เท่ากับ 5

5) กำหนดให้จุด A(5, 5, 0), B(2, 12, 0) และ C(2, 12, 4) เป็นจุดยอดมุมของสามเหลี่ยม จงหาเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมรูปนี้ (ให้ $\sqrt{58} \approx 7.6$ และ $\sqrt{92} \approx 9.5$

วิธีทำ เส้นรอบรูปสามเหลี่ยม $= AB + BC + CA$

จากสูตร $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2}$

จะได้ $AB = \sqrt{(2 - 5)^2 + (12 - 5)^2 + (0 - 0)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (7)^2 + (0)^2}$

$= \sqrt{9 + 49 + 0}$

$= \sqrt{58}$

≈ 7.6

$BC = \sqrt{(2 - 2)^2 + (12 - 12)^2 + (4 - 0)^2}$

$= \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (4)^2}$

$= \sqrt{0 + 0 + 16}$

$= \sqrt{16}$

$= 4$

$CA = \sqrt{(5 - 2)^2 + (5 - 12)^2 + (0 - 4)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (-7)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{9 + 49 + 16}$

$= \sqrt{92}$

≈ 9.5

เส้นรอบรูปสามเหลี่ยม $= AB + BC + CA$

$= 7.6 + 4 + 9.5$

$= 21.1$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 20

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ **จำนวน 19 ชั่วโมง**

เรื่อง เวกเตอร์ **จำนวน 5 ชั่วโมง**

ผู้สอน นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล **โรงเรียนสตรีศึกษา**

ผลการเรียนรู้

42) หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ หาผลคูณเชิงสเกลาร์ และผลคูณเชิงเวกเตอร์

43) นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

53) สามารถหาคงามยาวของเวกเตอร์ และมุมระหว่างเวกเตอร์โดยใช้กฎโคไซน์ได้ (K)

54) สามารถของลักษณะของเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน และทิศทางตรงกันข้าม เวกเตอร์ที่ขนานกัน เวกเตอร์ที่เท่ากันได้ (K)

55) สามารถบอกลักษณะเวกเตอร์ศูนย์ได้ (K)

56) สามารถคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ได้ (K)

57) สามารถเขียนรูปแสดงทิศทางของเวกเตอร์ได้ (P)

58) สามารถเขียนรูปแสดงการบวก และการลบของเวกเตอร์ได้ (P)

59) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

เวกเตอร์ นิเสธของเวกเตอร์ การบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

การบอกทิศทางของเวกเตอร์ให้ใช้ทิศเหนือเป็นแกนหลัก แล้ววัดมุมไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาไปยังเวกเตอร์ โดยเขียนบอกขนาดของมุมด้วยระบบตัวเลข 3 หลัก

เวกเตอร์ที่ขนานกัน คือ เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน หรือทิศทางตรงกันข้าม

เวกเตอร์ที่เท่ากัน คือ เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน และมรขนาดเท่ากันหรือมีความยาวเท่ากัน

การบวกเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย $\bar{u} + \bar{v}$ คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$

การลบเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย $\bar{u} - \bar{v}$ คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$ และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{u}$ หรือ การหาผลบวกของ $\bar{u}$ และนิเสธของ $\bar{v}$

ให้ a เป็นสเกลาร์ และ $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ ผลคูณของเวกเตอร์ $\bar{u}$ ด้วยสเกลาร์ a เป็นเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย $a\bar{u}$ โดยที่

1) ถ้า $a = 0$ แล้ว $a\bar{u} = \bar{0}$

2) ถ้า $a > 0$ แล้ว $a\bar{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a||\bar{u}|$ และมีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$

3) ถ้า $a < 0$ แล้ว $a\bar{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a||\bar{u}|$ และมีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\bar{u}$

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการจำแนกประเภท 2) ทักษะการคิดคล่อง 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้

📖 **แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : แบบอุปนัย (Inductive Method)**

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

เตรียม

12. ครูยกตัวอย่างสถานการณ์เกี่ยวกับปริมาณที่ใช้บอกขนาด และปริมาณที่ใช้บอกขนาดและทิศทาง ดังนี้

ปริมาณที่ใช้บอกขนาด ว่ามีมากหรือน้อยเพียงใด เช่น บ้านของนิธิศมีพื้นที่ 50 ตารางวา น้ำผลไม้ในขวดมีปริมาตร 700 ลูกบาศก์เซนติเมตร นายธเนศหนัก 50 กิโลกรัม เป็นต้น ส่วนปริมาณที่ใช้บอกขนาดและทิศทาง เช่น น้ำใสเดินทางไปทิศใต้เป็นระยะทาง 1 กิโลเมตร ตะวันขับรถไปจังหวัดเชียงใหม่ด้วนความเร็ว 80 กิโลเมตรต่อชั่วโมง เป็นต้น

13. ครูแจกใบงานที่ 3.2 ปริมาณเวกเตอร์และปริมาณสเกลาร์ เมื่อนักเรียนทำใบงานเสร็จแล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

ขั้นสอน

สอนหรือแสดง

35. ครูอธิบายนักเรียนว่า เมื่อเราสามารถจำแนกปริมาณออกเป็น 2 ประเภทแล้ว ปริมาณที่มีขนาดเพียงอย่างเดียว เรียกว่า ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity) ส่วนปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เรียกว่า ปริมาณเวกเตอร์ (vector quantity) หรือเรียกสั้น ๆ ว่า เวกเตอร์

36. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาเนื้อหาในหนังสือเรียน หน้า 218 – 219 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง จากนั้นครูให้นักเรียนแต่ละคู่ วาดรูปเวกเตอร์ตามคำสั่ง ดังนี้

- $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน
- $\bar{a}$ กับ $\bar{b}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้าม
- $\bar{c}$ กับ $\bar{d}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกัน
- $\bar{e}$ กับ $\bar{f}$ เป็นเวกเตอร์ที่เท่ากัน
- จงสร้าง $\bar{g}$ จากนั้นสร้าง $-\bar{g}$

37. เมื่อนักเรียนวาดรูปเวกเตอร์เสร็จแล้วครูอธิบายความรู้เกี่ยวกับ เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้าม เวกเตอร์ที่ขนานกัน เวกเตอร์ที่เท่ากัน และนิเสธของเวกเตอร์

38. ครูให้นักเรียนอ่านโจทย์ตัวอย่างที่ 5 ในหนังสือเรียน หน้า 220 แล้วให้นักเรียนวาดรูป จากนั้นอธิบายและแสดงวิธีการหาคำตอบให้นักเรียนดูบนกระดานดำอย่างละเอียด

39. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” เมื่อเสร็จแล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นสอน

สอนหรือแสดง

1. ครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- ดาวมีน้ำหนัก 55 กิโลกรัม และแดงผลักโต๊ะที่มีน้ำหนัก 40 กิโลกรัม ไปข้างหน้าเป็นระยะทาง 3 เมตร ข้อความใดเป็นเวกเตอร์ เพราะอะไร

(**แนวตอบ** แดงผลักโต๊ะที่มีน้ำหนัก 40 กิโลกรัม ไปข้างหน้าเป็นระยะทาง 3 เมตร เพราะการที่แดงผลักโต๊ะไปข้างหน้านั้นแสดงถึงทิศทาง ส่วนระยะทางที่แดงผลักเป็น 3 เมตรเป็นขนาด)

- เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้าม ต่างกันอย่างไร

(**แนวตอบ** เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้าม เป็นเวกเตอร์ที่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน หรืออยู่ในแนวเส้นตรงที่ขนานกัน แต่เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกันจะมีหัวลูกศรไปทางเดียวกัน ส่วนเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้ามจะมีหัวลูกศรไปทางตรงกันข้าม)

- เวกเตอร์ที่ขนานกันจะมีลักษณะอย่างไร

(**แนวตอบ** เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์จะขนานกัน ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีทิศทางเดียวกันหรือทิศทางตรงกันข้าม)

- เวกเตอร์ที่เท่ากันจะมีลักษณะอย่างไร

(**แนวตอบ** เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์จะมีขนาดเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน)

- นิเสธของเวกเตอร์ใด ๆ จะมีลักษณะอย่างไร

(**แนวตอบ** นิเสธของเวกเตอร์ใด ๆ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศทางตรงกันข้าม)

2. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 6 ในหนังสือเรียน หน้า 220 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้าม ต่างกันอย่างไร

(**แนวตอบ** เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้าม เป็นเวกเตอร์ที่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน หรืออยู่ในแนวเส้นตรงที่ขนานกัน แต่เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกันจะมีหัวลูกศรไปทางเดียวกัน ส่วนเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้ามจะมีหัวลูกศรไปทางตรงกันข้าม)

- เวกเตอร์ที่เท่ากันจะมีลักษณะอย่างไร

(**แนวตอบ** เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์จะมีขนาดเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน)

- นิเสธของเวกเตอร์ใด ๆ จะมีลักษณะอย่างไร

(**แนวตอบ** นิเสธของเวกเตอร์ใด ๆ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศทางตรงกันข้าม)

หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 220 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

3. ครูให้นักเรียนอ่าน “คณิตน่ารู้” จากหนังสือเรียน หน้า 220 ว่า “เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนยาวไม่เท่ากัน แต่แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน” จากนั้นครูนำกระดาษรูปสี่เหลี่ยมมาแสดงให้นักเรียนดูแล้วพับแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

4. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 7 ในหนังสือเรียน หน้า 221 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- เวกเตอร์ที่เท่ากันจะมีลักษณะอย่างไร

(**แนวตอบ** เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์จะมีขนาดเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน)

- นิเสธของเวกเตอร์ใด ๆ จะมีลักษณะอย่างไร

(**แนวตอบ** นิเสธของเวกเตอร์ใด ๆ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศทางตรงกันข้าม)

หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 221 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

5. ครูอธิบาย “คณิตน่ารู้” จากหนังสือเรียน หน้า 222 ว่า การกำหนดทิศทางของเวกเตอร์ โดยใช้ระบบตัวเลขสามตัว จะใช้ขนาดของมุมเป็นองศาในการบอกทิศทาง โดยเริ่มวัดจากทิศเหนือไปตามเข็มนาฬิกาตามขนาดของมุมที่กำหนด โดยขนาดของมุมที่อยู่ระหว่าง 0 กับ 100 องศา จะเป็น 0 นำหน้า เช่น ขนาดของมุม 60 องศา เขียนแทนด้วย 060 องศา”

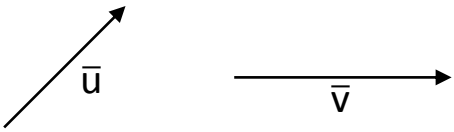
6. ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 3.2ก ในหนังสือเรียน หน้า 222 – 223 เป็นการบ้าน

ชั่วโมงที่ 3

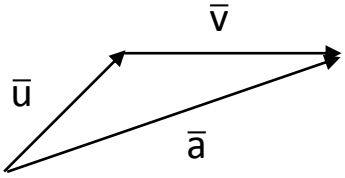
ขั้นสอน

สอนหรือแสดง

1. ครูกำหนด $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ไว้บนกระดานดำ ดังนี้



2. ครูให้นักเรียนวาด $\bar{u}$ จากนั้นให้นำจุดเริ่มต้นของ $\bar{v}$ มาต่อกับจุดสิ้นสุดของ $\bar{u}$ และให้นักเรียนใช้สันตรงลากเส้นจากจุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ ไปยังจุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$ และให้นักเรียนกำหนดชื่อเป็น $\bar{a}$ ซึ่งจะได้รูปดังนี้



3. ครูอธิบายว่าเราจะเรียก $\bar{a}$ ว่าเป็นเวกเตอร์ผลบวกของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ซึ่งเวกเตอร์ $\bar{a}$ เกิดจากการลากเส้นจากจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ จุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$ ดังนั้น ผลบวกของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย $\bar{u} + \bar{v}$ คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$

4. ครูอธิบาย“คณิตน่ารู้” จากหนังสือเรียน หน้า 224 ว่า “นักเรียนสามารถหาผลบวกของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ โดยการนำจุดเริ่มต้นของ $\bar{v}$ มาต่อกับจุดสิ้นสุดของ $\bar{u}$ ผลบวกของเวกเตอร์หรือเวกเตอร์ผลลัพธ์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ จุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$ ” จากนั้นครูแสดงให้นักเรียนดูบนกระดาน

5. ครูให้เรียนดูรูปที่ 17 ในหนังสือเรียน หน้า 225 จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\bar{u} + \bar{v}$ เท่ากับ $\bar{w}$ ใช่หรือไม่ เพราะเหตุ

(**แนวตอบ** ไม่ใช่ เพราะ ผลบวกของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ จุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$ แต่ $\bar{w}$ มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$ และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ ดังนั้น ผลบวกของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เท่ากับ $-\bar{w}$ ซึ่งมีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$จุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$)

- $\bar{v} + \bar{w}$ เท่ากับ $-\bar{u}$ ใช่หรือไม่ เพราะเหตุ

(**แนวตอบ** ใช่ เพราะ $-\bar{u}$ มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\bar{v}$ จุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{w}$)

40. ครูอธิบายนักเรียนเพิ่มเติมว่า “เวกเตอร์ศูนย์ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์ เขียนแทนด้วย $\bar{0}$ ” จากนั้นครูถามคำถามนักเรียนเพิ่มว่า จากรูปที่ 17 $\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}$ เท่ากับเท่าไร

(**แนวตอบ** $\bar{0}$ เพราะ ผลบวกของ $\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน เรียกว่า เวกเตอร์ศูนย์)

เปรียบเทียบและรวบรวม

1. ครูให้นักเรียนทำ “Thinking Time” ในหนังสือเรียน หน้า 225
2. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “Thinking Time” ดังนี้

   กำหนดให้ จุด A ดังนี้

   นักเรียนคิดว่า จุด A เป็นเวกเตอร์ศูนย์หรือไม่

   (แนวตอบ กำหนดจุด A มีพิกัดเป็น (1,2,3) และ B มีพิกัดเป็น (1,2,3) หาระยะทางระหว่าง A และ B ได้ดังนี้

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2}$$

$$= \sqrt{(1 - 1)^2 + (2 - 2)^2 + (3 - 3)^2}$$

$$= \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (0)^2}$$

$$= 0$$

   เพราะฉะนั้น ขนาดของ A และ B เท่ากับ 0 ซึ่งจุด A และ B คือพิกัดจุดเดียวกัน

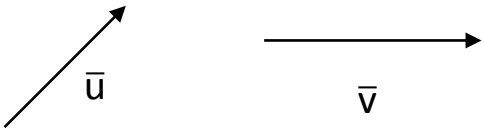
   ดังนั้น จุด A เวกเตอร์ศูนย์)

ชั่วโมงที่ 4

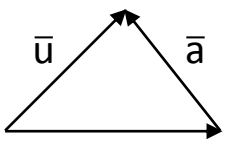
ขั้นสอน

สอนหรือแสดง

1. ครูกำหนด $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ไว้บนกระดานดำ ดังนี้



2. ครูให้นักเรียนวาด $\bar{u}$ จากนั้นให้นำจุดเริ่มต้นของ $\bar{v}$ มาต่อกับจุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ และให้นักเรียนใช้สันตรงลากเส้นจากจุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$ ไปยังจุดสิ้นสุดของ $\bar{u}$ และให้นักเรียนกำหนดชื่อเป็น $\bar{a}$ ซึ่งจะได้รูปดังนี้



$\bar{v}$

3. ครูอธิบายว่าเราจะเรียก $\bar{a}$ ว่าเป็นเวกเตอร์ผลลบของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ซึ่งเวกเตอร์ $\bar{a}$ เกิดจากการลากเส้นจากจุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$ ไปยังจุดสิ้นสุดของ $\bar{u}$ ดังนั้น ผลลบของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย $\bar{u} - \bar{v}$ คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$ และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{u}$

4. ครูอธิบาย“คณิตน่ารู้” จากหนังสือเรียน หน้า 226 ว่า “นักเรียนสามารถหาผลลบของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ โดยการผลบวกของ $\bar{u}$ และนิเสธของ $\bar{v}$ ” จากนั้นครูแสดงให้นักเรียนดูบนกระดาน

5. ครูอธิบายความรู้เพิ่มเติมเกี่ยวกับการหาผลบวกและการหาผลลบของเวกเตอร์ว่า นอกจากที่เราจะใช้บทนิยามในการหาผลบวกและการหาผลลบของเวกเตอร์แล้วเรายังใช้ “กฎของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน” ได้อีกด้วย โดยให้นักเรียนดูรูปที่ 20 ประกอบ

เปรียบเทียบและรวบรวม

1. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 8 ในหนังสือเรียน หน้า 227 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง
2. ครูวาดรูปผลลัพธ์ของกิจกรรม “ลองทำดู” จากนั้นให้นักเรียนจับคู่รูปที่ครูวาดกับโจทย์ ลงในสมุด
3. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 9 ในหนังสือเรียน หน้า 228 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 229 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”
4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 3.2ก ในหนังสือเรียนหน้า 229 – 230 เป็นการบ้าน

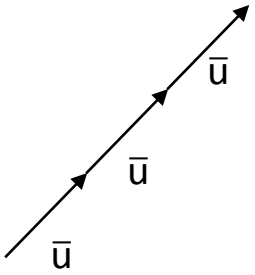
ชั่วโมงที่ 5

ขั้นสอน

สอนหรือแสดง

1. ครูกำหนด $\bar{u}$ ไว้บนกระดานดำ ดังนี้

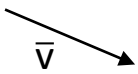
2. ครูให้นักเรียนวาด $\bar{u}$ จากนั้นให้นำจุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ มาต่อกันไปอีก 3 อันดังนี้



3. ครูอธิบายว่า จากรูปคือการ $\bar{u}$ มาบวกกัน ซึ่งเท่ากับ $\bar{u} + \bar{u} + \bar{u} = 3\bar{u}$

4. ครูอธิบายเพิ่มว่า ถ้าเราให้ a เป็นสเกลาร์ และ $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ ผลคูณของเวกเตอร์ $\bar{u}$ ด้วยสเกลาร์ a เป็นเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย $a\bar{u}$

5. ครูกำหนด $\bar{v}$ ไว้บนกระดานดำ ดังนี้



6. ครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- ถ้านำ 0 คูณกับ $\bar{v}$ จะได้เวกเตอร์ในลักษณะใด

  (แนวตอบ $\bar{0}$ เพราะ 0 คูณจำนวนใด ๆ จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ 0 ดังนั้นการนำ 0 ไปคูณเวกเตอร์ใด ๆ ก็เท่ากับ เวกเตอร์ศูนย์)

- ถ้านำ 3 คูณกับ $\bar{v}$ จะได้เวกเตอร์ในลักษณะใด

  (แนวตอบ $3\bar{v}$ มีขนาดสามเท่าของขนาด $\bar{v}$ และมีทิศทางเดียวกับ $\bar{v}$)

- ถ้านำ -2 คูณกับ $\bar{v}$ จะได้เวกเตอร์ในลักษณะใด

  (แนวตอบ $-2\bar{v}$ มีขนาดสv'เท่าของขนาด $\bar{v}$ และมีทิศทางตรางกันข้ามกับ $\bar{v}$)

7. ครูให้นักเรียนจับกลุ่ม กลุ่มละ 3 คนศึกษาตัวอย่างที่ 10, 11, 12 ในหนังสือเรียน หน้า 231 – 233 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้ภายในกลุ่มของตนเอง จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” โดยที่ทั้ง 3 คนจะได้ทำ “ลองทำดู” คนละอันกัน เมื่อเสร็จแล้วครูสุ่มตัวแทนกลุ่มออกมาเฉลยคำตอบหน้าชั้นเรียน ครูและนักเรียนร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง

8. ครูอธิบายความรู้เกี่ยวกับการขนานกันของเวกเตอร์ในหนังสือเรียน หน้า 234

9. ครูแสดงวิธีการหาคำตอบตัวอย่างที่ 13 ในหนังสือเรียน หน้า 234 และแสดงวิธีการบนกระดานดำ

เปรียบเทียบและรวบรวม

1. ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” เมื่อเสร็จแล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”
2. ครูให้นักเรียนศึกษาแนวข้อสอบ PAT 1 ในหนังสือเรียนหน้า 235 และครูคอยตอบคำถามที่นักเรียนสงสัยจากการศึกษาแนวข้อสอบ PAT 1

ขั้นสรุป

สรุป

5. ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้าม ต่างกันอย่างไร

(**แนวตอบ** เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้าม เป็นเวกเตอร์ที่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน หรืออยู่ในแนวเส้นตรงที่ขนานกัน แต่เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกันจะมีหัวลูกศรไปทางเดียวกัน ส่วนเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้ามจะมีหัวลูกศรไปทางตรงกันข้าม)

- เวกเตอร์ที่ขนานกันจะมีลักษณะอย่างไร

(**แนวตอบ** เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์จะขนานกัน ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีทิศทางเดียวกัน หรือทิศทางตรงกันข้าม)

- เวกเตอร์ที่เท่ากันจะมีลักษณะอย่างไร

(**แนวตอบ** เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์จะมีขนาดเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากัน และทิศทางเดียวกัน)

- นิเสธของเวกเตอร์ใด ๆ จะมีลักษณะอย่างไร

(**แนวตอบ** นิเสธของเวกเตอร์ใด ๆ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศทางตรงกันข้าม)

นำไปใช้

6. ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 3.2ข ในหนังสือเรียน หน้า 235 – 236

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้			
1) เวกเตอร์	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 3.2 - ตรวจ Exercise 3.2 - ตรวจใบงานที่ 3.2	- แบบฝึกทักษะ 3.2 - Exercise 3.2 - ใบงานที่ 3.2	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

14) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เวกเตอร์ในสามมิติ

15) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เวกเตอร์ในสามมิติ

16) ใบงานที่ 3.2 เรื่อง ปริมาณเวกเตอร์และปริมาณสเกลาร์

แหล่งการเรียนรู้

1) ห้องสมุด
2) แหล่งชุมชน
3) อินเทอร์เน็ต

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 21

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ **จำนวน 19 ชั่วโมง**

เรื่อง เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก **จำนวน 4 ชั่วโมง**

ผู้สอน นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล **โรงเรียนสตรีศึกษา**

ผลการเรียนรู้

44) หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ หาผลคูณเชิงสเกลาร์ และผลคูณเชิงเวกเตอร์

45) นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

60) สามารถหาจุดเริ่มต้น หรือจุดปลายของเวกเตอร์ได้ (K)

61) สามารถบวก ลบ เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากได้ (K)

62) สามารถหาขนาดของเวกเตอร์ในสองมิติ และสามมิติได้ (K)

63) สามารถหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในสองมิติ และสามมิติได้ (K)

64) สามารถหาโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ได้ (K)

65) สามารถเขียนเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากได้ เมื่อกำหนดจุดสองจุดมาให้ (P)

66) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากเป็นเวกเตอร์ที่เขียนอยู่ในรูปของผลบวกของเวกเตอร์ที่มีทิศทางในแนวแกนอ้างอิงในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติ

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 16) ทักษะการเชื่อมโยง 17) ทักษะการคิดคล่อง 18) ทักษะกระบวนการคิดแก้ปัญหา 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้

📖 **แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching**

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

ขั้นการใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

ครูทบทวนความรู้เกี่ยวกับระบบพิกัดฉาก โดยใช้คำถามถามนักเรียน ดังนี้

- ระบบพิกัดฉากสองมิติประกอบด้วยแกนใดบ้าง และแบ่งระนาบออกเป็นกี่ส่วน และแต่ละส่วนเรียกว่าอะไร

(**แนวตอบ** ระบบพิกัดฉากสองมิติ ประกอบด้วยแกน X และแกน Y แบ่งระนาบออกเป็น 4 ส่วน และแต่ละส่วนเรียกว่า จตุภาค)

- ระบบพิกัดฉากสามมิติประกอบด้วยแกนใดบ้าง และแบ่งระนาบออกเป็นกี่ส่วน และแต่ละส่วนเรียกว่าอะไร

(**แนวตอบ** ระบบพิกัดฉากสามมิติ ประกอบด้วยแกน X แกน Y และแกน Z แบ่งระนาบออกเป็น 8 ส่วน และแต่ละส่วนเรียกว่า อัฐภาค)

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

41. ครูให้นักเรียนดูรูปที่ 21 ในหนังสือเรียน หน้า 237 และถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ มีขนาดกี่หน่วย และมีทิศทางขนานกับแกนอะไร

(**แนวตอบ** $\bar{u}$ มีขนาด 4 หน่วย ทิศทางขนานกับแกน X ส่วน $\bar{v}$ มีขนาด 5 หน่วย ทิศทางขนานกับแกน Y)

42. ครูอธิบายเพิ่มเติมว่า การเขียนเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติโดยทั่วไป เขียนแทนด้วย $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นผลบวกของเวกเตอร์สองเวกเตอร์ คือ

เวกเตอร์ $\bar{u}$ มีขนาด $|a|$ หน่วย ถ้า $a > 0$ เวกเตอร์นี้จะมีทิศทางขนานกับแกน X ไปทางขวา ถ้า $a < 0$ เวกเตอร์นี้จะมีทิศทางขนานกับแกน X ไปทางซ้าย

เวกเตอร์ $\bar{v}$ มีขนาด $|b|$ หน่วย ถ้า $b > 0$ เวกเตอร์นี้จะมีทิศทางขนานกับแกน Y ไปข้างบน ถ้า $b < 0$ เวกเตอร์นี้จะมีทิศทางขนานกับแกน Y ไปไปด้านล่าง

43. ครูแสดงตัวอย่างที่ 14 ในหนังสือเรียน หน้า 238 ให้นักเรียนดูบนกระดาน จากนั้นให้นักเรียนให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” เมื่อเสร็จแล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

44. ครูให้นักเรียนอ่าน “คณิตน่ารู้” จากหนังสือเรียน หน้า 238 ว่า “เมื่อ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดกำเนิด O จะมีจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุด (a,b)”

45. ครูให้นักเรียนศึกษาความรู้ในหนังสือเรียน หน้า 238 – 239 ครูอธิบายเพิ่มเติมว่า ถ้ากำหนดให้ $A(x_1,y_1)$ และ $B(x_2,y_2)$ เป็นจุดใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสองมิติ แล้วต้องการหา $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

5. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 15 ในหนังสือเรียน หน้า 239 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 240 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

6. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 16 ในหนังสือเรียน หน้า 240 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 240 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

1. ครูให้นักเรียนดูรูปที่ 24 ในหนังสือเรียน หน้า 240 และถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- จากรูป เวกเตอร์ OP เกิดจากเวกเตอร์ใด

(แนวตอบ เวกเตอร์ OP เกิดจากการบวกกันของ $\bar{u} + \bar{v} + \bar{w} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$)

2. ครูอธิบายนักเรียนเพิ่มเติมว่า กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง เรียก $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ว่า เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติหรือเวกเตอร์ในสามมิติ

3. ครูแสดงตัวอย่างที่ 17 ในหนังสือเรียน หน้า 241 ให้นักเรียนดูบนกระดาน จากนั้นให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 241 เมื่อเสร็จแล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

4. ครูให้นักเรียนอ่าน “คณิตน่ารู้” จากหนังสือเรียน หน้า 241 ว่า “เมื่อ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดกำเนิด O จะมีจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุด (a,b,c)” และครูอธิบายเพิ่มเติมว่า ทั้งเวกเตอร์ในสองมิติและเวกเตอร์ในสามมิติ ถ้าเวกเตอร์ใด ๆ มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดกำเนิด จุดสิ้นสุดจะอยู่ที่จุดของเวกเตอร์นั้น ๆ

5. ครูให้นักเรียนศึกษาความรู้ในหนังสือเรียน หน้า 242 – 243 ครูอธิบายเพิ่มเติมว่า ถ้ากำหนดให้ $A(x_1,y_1,z_1)$ และ $B(x_2,y_2,z_2)$ เป็นจุดใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ แล้วต้องการหา

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

1. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 18 ในหนังสือเรียน หน้า 243 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 243 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

2. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 19 ในหนังสือเรียน หน้า 243 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 240 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

3. ครูให้นักเรียนศึกษาความรู้ในหนังสือเรียน หน้า 244 จากนั้นครูสุ่มนักเรียนให้มาอธิบายเกี่ยวกับการเท่ากันของเวกเตอร์ การบวกเวกเตอร์ เวกเตอร์ศูนย์ นิเสธของเวกเตอร์ การลบเวกเตอร์ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติ ตามความเข้าใจของตนเอง เพื่อเป็นการทบทวนความรู้

ครูคอยเสริมความรู้ในบางส่วนให้สมบูรณ์

7. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 20 ในหนังสือเรียน หน้า 245 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 245 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

4. ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 3.3ก ในหนังสือเรียน หน้า 245 – 246 เป็นการบ้าน

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

1. ครูกำหนดจุดต่าง ๆ ในพิกัดฉากสองมิติ ลงบนกระดาน เช่น จุด A(1,2), B(5,2) และจุด C(5,5) จากนั้นครูถามคำถามนักเรียนนักเรียน ดังนี้

- ระยะทางระหว่างจุด A(1,2) กับ B(5,2) มีระยะทางเป็นเท่าไร และมีวิธีการหาอย่างไร

(แนวตอบ ระยะทางระหว่างจุด A(1,2) กับ B(5,2) มีระยะทาง 4 หน่วย หาได้โดยการนำค่า x ของจุด B คือ 5 มาลบกับค่า x จุด A คือ 1 ซึ่งมีผลลัพธ์เท่ากับ 4)

- ระยะทางระหว่างจุด B(5,2) กับ C(5,5) มีระยะทางเป็นเท่าไร และมีวิธีการหาอย่างไร

(แนวตอบ ระยะทางระหว่างจุด B(5,2) กับ C(5,5) มีระยะทาง 3 หน่วย หาได้โดยการนำค่า y ของจุด C คือ 5 มาลบกับค่า y จุด B คือ 2 ซึ่งมีผลลัพธ์เท่ากับ 4)

2. ครูให้นักเรียนศึกษาความรู้ในหนังสือเรียน หน้า 247 จากนั้นครูให้นักเรียนดูรูปการหาขนาดของเวกเตอร์ในสองมิติในหนังสือเรียน หน้า 247 และครูอธิบายนักเรียนว่า ขนาดของเวกเตอร์สองมิติหาได้จาก $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ การหาขนาดของเวกเตอร์ในสองมิตินั้นเราสามารถนำความรู้เรื่องพีทาโกรัสเข้ามาช่วยได้

3. ครูอธิบายเพิ่มเติมว่า ถ้าให้ $x_2 - x_1 = a$ และ $y_2 - y_1 = b$ จะได้ $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

ดังนั้น $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

4. ครูให้นักเรียนดูรูปการหาขนาดของเวกเตอร์ในสามมิติในหนังสือเรียน หน้า 247 และครูอธิบาย

นักเรียนว่า ขนาดของเวกเตอร์สามมิติหาได้จาก $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ การหาขนาดของเวกเตอร์ในสามมิตินั้นเราสามารถนำความรู้เรื่องระยะทางระหว่างจุดสองจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติเข้ามาช่วยได้

5. ครูอธิบายเพิ่มเติมว่า ถ้าให้ $x_2 - x_1 = a$, $y_2 - y_1 = b$ และ $z_2 - z_1 = c$ จะได้ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

ดังนั้น $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

1. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 21 ในหนังสือเรียน หน้า 248 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 248 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

2. ครูแจกใบงานที่ 3.3 เรื่อง ขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติ ให้นักเรียนทำ จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบใบงานที่ 3.3

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

1. ครูอธิบายความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยว่า เวกเตอร์หนึ่งหน่วย หมายถึง เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย

2. ครูให้นักเรียนพิจารณาเวกเตอร์ $\overline{u} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$, $\overline{v} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{13} \\ \frac{12}{13} \end{bmatrix}$ และ $\overline{w} = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} \\ -\frac{24}{25} \end{bmatrix}$ ในหนังสือเรียน หน้า 248 จากนั้นครูให้นักเรียนศึกษาความรู้ในหนังสือเรียน หน้า 249 เรื่อง เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในสองมิติ

3. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในสองมิติ ดังนี้

เวกเตอร์ 1 หน่วย ที่มีทิศทางเดียวกับ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ 1 หน่วย ที่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ $-\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ 1 หน่วย ที่ขนานกับ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\pm\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ k หน่วย ที่ขนานกับ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\pm\frac{k}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

4. ครูอธิบายความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในสามมิติว่า เวกเตอร์หนึ่งหน่วยกับเวกเตอร์ใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติมีแนวคิดเช่นเดียวกับการหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสองมิติ

5. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในสามมิติ ดังนี้

เวกเตอร์ 1 หน่วย ที่มีทิศทางเดียวกับ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ 1 หน่วย ที่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ $-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ 1 หน่วย ที่ขนานกับ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ k หน่วย ที่ขนานกับ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\pm\frac{k}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

6. ครูให้นักเรียนศึกษาความรู้ในหนังสือเรียน หน้า 250 – 251 จากนั้นครูอธิบายเกี่ยวกับการเขียนเวกเตอร์ใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติในรูปเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ ดังนี้

เวกเตอร์ใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสองมิติ $\quad \bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\bar{i} + b\bar{j}$

เวกเตอร์ใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ $\quad \bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

1. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 22 ในหนังสือเรียน หน้า 252 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 252 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

2. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 23 ในหนังสือเรียน หน้า 252 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 253 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

ชั่วโมงที่ 4

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

1. ครูให้นักเรียนศึกษาความรู้ในหนังสือเรียน หน้า 253 จากนั้นครูให้นักเรียนดูรูที่ 27 และครูอธิบายว่า การกำหนดทิศทางของเวกเตอร์ นอกจากกำหนดด้วยพิกัดของเวกเตอร์ ยังกำหนดด้วยมุมที่เวกเตอร์ทำกับแกนพิกัดทั้งสาม คือ แกน X แกน Y และแกน Z ทางด้านบวก (ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา) ซึ่งมุมที่เวกเตอร์ทำกับแกนพิกัดทั้งสาม จะมีขนาดตั้งแต่ 0 ถึง π

2. ครูอธิบายความรู้เกี่ยวกับ โคไซน์แสดงทิศทาง ดังนี้

ให้ $\bar{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ โคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{v}$ เทียบกับแกน X แกน Y และแกน Z ตามลำดับ คือ จำนวนสามจำนวนซึ่งเรียงลำดับ ดังนี้ $\frac{a}{|\bar{v}|}, \frac{b}{|\bar{v}|}, \frac{c}{|\bar{v}|}$

3. ครูถามคำถามนักเรียนว่า ค่า $\frac{a}{|\bar{v}|}, \frac{b}{|\bar{v}|}, \frac{c}{|\bar{v}|}$ มีค่าเท่ากันได้หรือไม่

(แนวตอบ ค่า $\frac{a}{|\bar{v}|}, \frac{b}{|\bar{v}|}, \frac{c}{|\bar{v}|}$ อาจมีค่าเท่ากันหรือไม่เท่ากันได้ขึ้นอยู่กับขนาดของมุมที่เวกเตอร์ทำกับแกนพิกัดทั้งสาม คือ แกน X แกน Y และแกน Z ทางด้านบวก)

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

1. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 24 ในหนังสือเรียน หน้า 254 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 254 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

2. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 25 ในหนังสือเรียน หน้า 254 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ แล้วหลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 254 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

3. ครูให้นักเรียนศึกษาบทนิยาม ในหนังสือเรียน หน้า 254 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ

4. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 26 ในหนังสือเรียน หน้า 255 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 256 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

ขั้นลงมือทำ (Doing)

1. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วให้ทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ดังนี้

- ให้นักเรียนทำทำแบบฝึกทักษะ 3.3ข ในหนังสือเรียนหน้า 256 – 257
- ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจร่วมกัน หลังจากนั้นครูลุ่มนักเรียนในแต่ละกลุ่มออกมาเฉลยคำตอบ และให้นักเรียนทั้งร่วมกันอภิปรายแสดงความเห็น

ขั้นสรุป

ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก คืออะไร

(**แนวตอบ** เวกเตอร์ที่เขียนอยู่ในรูปของผลบวกของเวกเตอร์ที่มีทิศทางในแนวแกนอ้างอิงในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติ)

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้			
1) เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 3.3 - ตรวจ Exercise 3.3 - ตรวจใบงานที่ 3.3	- แบบฝึกทักษะ 3.3 - Exercise 3.3 - ใบงานที่ 3.3	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

17) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เวกเตอร์ในสามมิติ

18) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เวกเตอร์ในสามมิติ

19) ใบงานที่ 3.3 เรื่อง ขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติ

แหล่งการเรียนรู้

1) ห้องสมุด
2) แหล่งชุมชน
3) อินเทอร์เน็ต

ใบงานที่ 3.3

เรื่อง ขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติ

<u>คำชี้แจง</u> : ให้นักเรียนแสดงวิธีการหาคำตอบโดยละเอียด

1) กำหนดจุด A(-3, 10) และ B(6, 1) จงหาขนาดของเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$

.....

.....

.....

.....

.....

2) จงหาขนาดของเวกเตอร์ที่เริ่มต้นที่จุด (1, 2, 0) ไปยังจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด (2, 1, -3), (4, 5, 3)

.....

.....

.....

.....

3) กำหนดให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ จงหา $|2\bar{u}| + |3\bar{v}|$

.....

.....

.....

.....

4) ถ้า $\bar{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ a \end{bmatrix}$ และขนาดของ $|\bar{u}| = \sqrt{78}$ จงหาค่า a

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5) กำหนดให้ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ จงหาค่า $|\overrightarrow{AC}|$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ใบงานที่ 3.3

เฉลย

เรื่อง ขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติ

<u>คำชี้แจง</u> : ให้นักเรียนแสดงวิธีการหาคำตอบโดยละเอียด

1) กำหนดจุด A(-3, 10) และ B(6, 1) จงหาขนาดของเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 6 - (-3) \\ 1 - 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \end{bmatrix}$$

จากสูตร $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(9)^2 + (-9)^2}$$

$$= \sqrt{81 + 81}$$

$$= \sqrt{162}$$

$$= 9\sqrt{2}$$

ดังนั้น ขนาดของเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ เท่ากับ $9\sqrt{2}$

2) จงหาขนาดของเวกเตอร์ที่เริ่มต้นที่จุด (1, 2, 0) ไปยังจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด (2, 1, -3), (4, 5, 3)

<u>วิธีทำ</u> ให้ B เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด (2, 1, -3), (4, 5, 3)

จะได้ $B = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{1+5}{2}, \frac{-3+3}{2}\right)$

$$= (3, 3, 0)$$

เวกเตอร์ที่โจทย์ต้องการ $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 - 1 \\ 3 - 2 \\ 0 - 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จากสูตร $|\bar{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$|\bar{u}| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (0)^2}$

$= \sqrt{4 + 1 + 0}$

$= \sqrt{5}$

ดังนั้น ขนาดของเวกเตอร์ที่โจทย์ต้องการ เท่ากับ $\sqrt{5}$

3) กำหนดให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ จงหา $|2\bar{u}| + |3\bar{v}|$

<u>วิธีทำ</u>

$2\bar{u} = 2\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$

จากสูตร $|2\bar{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$|2\bar{u}| = \sqrt{(-4)^2 + (0)^2 + (8)^2}$

$= \sqrt{16 + 0 + 64}$

$= \sqrt{80}$

$= 4\sqrt{5}$

$3\bar{v} = 3\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix}$

จากสูตร $|3\bar{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$|3\bar{v}| = \sqrt{(12)^2 + (9)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{144 + 81 + 36}$

$= \sqrt{261}$

$= 3\sqrt{29}$

ดังนั้น $|2\bar{u}| + |3\bar{v}| = 4\sqrt{5} + 3\sqrt{29}$

4) ถ้า $\bar{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ x \end{bmatrix}$ และขนาดของ $|\bar{u}| = \sqrt{78}$ จงหาค่า x

วิธีทำ จากสูตร $|\bar{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

จะได้ $\sqrt{78} = \sqrt{(-2)^2 + (5)^2 + (x)^2}$

$\sqrt{78} = \sqrt{4 + 25 + x^2}$

$\sqrt{78} = \sqrt{x^2 + 29}$

$78 = x^2 + 29$

$x^2 = 49$

$x = \sqrt{49}$

$x = -7, 7$

ดังนั้น ค่า x ที่ทำให้ ขนาดของ $\bar{u}$ เท่ากับ $\sqrt{78}$ คือ -7 หรือ 7

5) กำหนดให้ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ จงหาค่า $|\overrightarrow{AC}|$

วิธีทำ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 + 2 \\ 0 + (-1) \\ 3 + (-2) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

จากสูตร $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{9 + 1 + 1}$

$= \sqrt{11}$

ดังนั้น ขนาดของ $\overrightarrow{AC}$ เท่ากับ $\sqrt{11}$

ใบงานที่ 3.2

เรื่อง ปริมาณเวกเตอร์และปริมาณสเกลาร์

<u>คำชี้แจง</u> : ให้นักเรียนจำแนกปริมาณที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ความเร็ว	ปริมาตร	เวลา	ความสูง	แรง	น้ำหนัก
อุณหภูมิ	ความยาว	พื้นที่	โมเมนตัม	การกระจัด	

ปริมาณที่มีขนาดเพียงอย่างเดียว	**ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง**
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⬇ ⬇

เรียกว่า.....

เรียกว่า.....

ใบงานที่ 3.2

เฉลย

เรื่อง ปริมาณเวกเตอร์และปริมาณสเกลาร์

<u>คำชี้แจง</u> : ให้นักเรียนจำแนกปริมาณที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ความเร็ว	ปริมาตร	เวลา	ความสูง	แรง	น้ำหนัก
อุณหภูมิ	ความยาว	พื้นที่	โมเมนตัม	การกระจัด	

ปริมาณที่มีขนาดเพียงอย่างเดียว

ความเร็ว แรง

ปริมาตร เวลา

ความสูง น้ำหนัก

อุณหภูมิ ความยาว

พื้นที่ มวล

ระยะทาง งาน

ความหนาแน่น พลังงาน

ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง

ความเร็ว

แรง

โมเมนตัม

การกระจัด

ความเร่ง

เรียกว่า ปริมาณสเกลาร์

เรียกว่า ปริมาณเวกเตอร์

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 22

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ **จำนวน 19 ชั่วโมง**

เรื่อง ผลคูณเชิงสเกลาร์ **จำนวน 3 ชั่วโมง**

ผู้สอน นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล **โรงเรียนสตรีศึกษา**

ผลการเรียนรู้

46) หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ หาผลคูณเชิงสเกลาร์ และผลคูณเชิงเวกเตอร์

47) นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

67) สามารถหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ได้ (K)

68) สามารถนำสมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์ไปใช้ได้ (K)

69) สามารถหามุมระหว่างเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากได้ (K)

70) สามารถวาดรูปเวกเตอร์ในสามมิติได้ได้(P)

71) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ผลคูณเชิงสเกลาร์

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

ถ้าให้ $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$ จะได้ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $x_1x_2 + y_1y_2$ และ ถ้าให้ $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ จะได้ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ เขียนแทนด้วย $\bar{u} \cdot \bar{v}$

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
19) ทักษะการเชื่อมโยง 20) ทักษะการคิดคล่อง 21) ทักษะกระบวนการคิดแก้ปัญหา 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้

📖 **แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching**

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

ขั้นการใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

14. ครูทบทวนความรู้เกี่ยวกับเรื่องปริมาณสเกลาร์ ว่าปริมาณสเกลาร์ คือ ปริมาณที่มีขนาดเพียงอย่างเดียว เช่น ตู้เสื้อผ้าใบหนึ่งสูง 3 เมตร ส้มหนัก 1 กิโลกรัม เป็นต้น

15. ครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- ชูชาติมีผลไม้อยู่ 3 ชนิด คือ มีส้มอยู่ 5 กิโลกรัม มีแอปเปิลอยู่ 4 กิโลกรัม และมีชมพู่อยู่ 7 กิโลกรัม ซึ่งทำให้น้ำหนักรวมของผลไม้เป็น 16 กิโลกรัม อยากทราบว่าน้ำหนักรวมของผลไม้เป็นปริมาณ สเกลาร์หรือไม่ เพราะเหตุใด

(**แนวตอบ** น้ำหนักรวมของผลไม้เป็นปริมาณสเกลาร์ เพราะน้ำหนักรวมของผลไม้มีเพียงขนาด ไม่มีทิศทาง)

- สุดาขับรถไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้ด้วยความเร็ว 90 กิโลเมตรต่อชั่วโมง เป็นปริมาณสเกลาร์หรือไม่ เพราะเหตุใด

(**แนวตอบ** ไม่เป็นปริมาณสเกลาร์ เพราะการขับรถของสุดา มีทั้งขนาด คือ 90 กิโลเมตรต่อชั่วโมง และยังมีทิศทาง จึงทำให้ไม่เป็นปริมาณสเกลาร์ แต่เป็นปริมาณเวกเตอร์)

- ภาคภูมิมีที่ดินอยู่ภาคตะวันออก จำนวน 50 ไร่ เป็นปริมาณสเกลาร์หรือไม่ เพราะเหตุใด

(**แนวตอบ** จำนวนที่ดินของภาคภูมิเป็นปริมาณสเกลาร์ เพราะจำนวนที่ดินเพียงขนาด ไม่มีทิศทาง)

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

46. ครูให้นักเรียนอ่านบทนิยาม ในหนังสือเรียน หน้า 258 จากนั้นครูอธิบายความรู้ ดังนี้

ผลคูณเชิงสเกลาร์ คือผลคูณของเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่มีผลลัพธ์เป็นสเกลาร์

จากบทนิยาม จะได้ว่า ถ้าให้ $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$ จะได้ $\bar{u} \cdot \bar{v} = x_1x_2 + y_1y_2$

และ ถ้าให้ $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ จะได้ $\bar{u} \cdot \bar{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

47. ครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- กำหนดให้ $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$ แล้ว $\bar{u} \cdot \bar{v}$ จะเท่ากับ $\bar{v} \cdot \bar{u}$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

  (**แนวตอบ** จาก $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$

  $\bar{u} \cdot \bar{v} = x_1x_2 + y_1y_2$

  $= x_2x_1 + y_2y_2$ (สมบัติการสลับที่การคูณ: ab = ba)

  $= \bar{u} \cdot \bar{v}$

  ดังนั้น $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot \bar{v}$)

- ถ้าให้ $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$ คือ $\bar{u} \cdot \bar{v} = x_1x_2 + y_1y_2$ แล้วให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ $\bar{u} \cdot \bar{v}$ จะมีค่าเท่าไร

  (**แนวตอบ** $\bar{u} \cdot \bar{v} = x_1x_2 + y_1y_2$ เพราะว่า $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ เขียนให้อยู่ในรูป $\bar{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$ เขียนให้อยู่ในรูป $\bar{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ ดังนั้น $\bar{u} \cdot \bar{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2$)

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

7. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 27 ในหนังสือเรียน หน้า 258 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นอย่างไร

  (**แนวตอบ** ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นสเกลาร์)

หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 259 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

8. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 28 ในหนังสือเรียน หน้า 258 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นอย่างไร

(**แนวตอบ** ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นสเกลาร์)

หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 259 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

ขั้นลงมือทำ (Doing)

47. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วให้ทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ดังนี้

- ให้นักเรียนทำ “Thinking Time” ในหนังสือเรียน หน้า 259

- ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจร่วมกัน หลังจากนั้นครูสุ่มนักเรียนในแต่ละกลุ่มออกมาเฉลยคำตอบ และให้นักเรียนทั้งร่วมกันอภิปรายแสดงความเห็น

(**แนวตอบ** ให้ $\bar{u} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - 5\bar{k}$ และ $\bar{v} = 5\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k}$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = (3\bar{i} + 2\bar{j} - 5\bar{k}) \cdot (5\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k})$$
$$= (3)(5) + (2)(-3) + (-5)(4)$$
$$= 15 + (-15) + (-20)$$
$$= -20 \qquad (1)$$

และ
$$\bar{v} \cdot \bar{u} = (5\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k}) \cdot (3\bar{i} + 2\bar{j} - 5\bar{k})$$
$$= (5)(3) + (-3)(2) + (4)(-5)$$
$$= 15 + (-15) + (-20)$$
$$= -20 \qquad (2)$$

จาก (1) และ (2) มีค่าเท่ากัน

ดังนั้น $\bar{u} \cdot \bar{v}$ และ $\bar{v} \cdot \bar{u}$ มีค่าเท่ากัน)

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

1. ครูให้นักเรียนศึกษาความรู้เกี่ยวกับสมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงสเกลาร์ ในหนังสือเรียน หน้า 259
2. ครูและนักเรียนร่วมกับพิสูจน์สมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงสเกลาร์ ดังนี้

1) $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$

พิสูจน์ ให้ $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$

จะได้ $\bar{u} \cdot \bar{v} = (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}) \cdot (x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k})$

$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

$= x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1$

$= (x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}) \cdot (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k})$

$= \bar{v} \cdot \bar{u}$

2) $\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$

พิสูจน์ ให้ $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$, $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ และ $\bar{v} = x_3\bar{i} + y_3\bar{j} + z_3\bar{k}$

จะได้ $\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}) \cdot \left\{(x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}) + (x_3\bar{i} + y_3\bar{j} + z_3\bar{k})\right\}$

$= (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}) \cdot \left\{(x_2+x_3)\bar{i} + (y_2+y_3)\bar{j} + (z_2+ z_3)\bar{k}\right\}$

$= (x_1(x_2+x_3)) + (y_1(y_2+y_3)) + (z_1(z_2+ z_3))$

$= x_1x_2 + x_1x_3 + y_1y_2 + y_1y_3 + z_1z_2 + z_1z_3$

$= (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) + (x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3)$

$= \left\{(x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}) \cdot (x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k})\right\} +$

$\left\{(x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}) \cdot (x_3\bar{i} + y_3\bar{j} + z_3\bar{k})\right\}$

$= \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$

3) $a(\bar{u} \cdot \bar{v}) = (a\bar{u}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot (a\bar{v})$

พิสูจน์ ให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$

จะได้ $(a\bar{u}) \cdot \bar{v}$ $= (ax_1\bar{i} + ay_1\bar{j} + az_1\bar{k}) \cdot (x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k})$

$= ax_1x_2 + ay_1y_2 + az_1z_2$

$= a(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$

$= a\left\{(x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}) \cdot (x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k})\right\}$

$= a(\bar{u} \cdot \bar{v})$

4) $\bar{0} \cdot \bar{u} = 0$

พิสูจน์ ให้ $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ และ $\bar{0} = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$

จะได้ $\bar{0} \cdot \bar{u}$ $= (0\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}) \cdot (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k})$

$= 0x_1 + 0y_1 + 0z_1$

$= 0$

5) $\bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2$

พิสูจน์ ให้ $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$

จะได้ $\bar{u} \cdot \bar{u}$ $= (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}) \cdot (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k})$

$= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$

$= \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\right)^2$

$= |\bar{u}|^2$

3. ครูให้นักเรียนศึกษาการพิสูจน์สมบัติข้อที่ 2 และ 3 ในหนังสือเรียน หน้า 260

4. ครูอธิบายนักเรียนเพิ่มเติมว่า การหามุมระหว่างเวกเตอร์ นั้นเราจะใช้สูตร $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$ ซึ่งมุมที่หาได้นั้นจะมีขนาด 0° ถึง 180°

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

1. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 29 ในหนังสือเรียน หน้า 261 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

   - เวกเตอร์สองเวกเตอร์จะตั้งฉากกันเมื่อใด

     (**แนวตอบ** ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ทั้งสอง ได้ผลลัพธ์เป็น 0)

หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 261 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครู

และนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

2. ครูให้นักเรียนอ่าน “คณิตน่ารู้” ในหนังสือเรียน หน้า 261 ว่า เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ คือ $\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$ จากนั้นครูยกตัวอย่างเวกตอร์ และให้นักเรียนหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ที่ครูยกมา และครูสุ่มนักเรียนออกมาวาดรูปบนกระดาน

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นสอน

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

1. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 30 ในหนังสือเรียน หน้า 262 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- มุม θ ซึ่งเป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ หาได้อย่างไร

(**แนวตอบ** หาได้จากสูตร $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$)

หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 262 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

2. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 31 ในหนังสือเรียน หน้า 262 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- จะแสดงได้อย่างไรว่ารูปสามเหลี่ยม PQR เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

(**แนวตอบ** จะแสดงว่าผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์หนึ่งคู่ ได้ผลลัพธ์เป็น 0)

หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 263 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

3. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 32 ในหนังสือเรียน หน้า 263 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ๆ จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- ในตัวอย่างที่ 32 หา $|\bar{u} + \bar{v}|$ ได้อย่างไร

(**แนวตอบ** จากการกระจาย $|\bar{u} - \bar{v}|^2$ แล้วจะได้ $\bar{u} \cdot \bar{v}$ มาใช้ในการกระจาย $|\bar{u} + \bar{v}|^2$ และหาค่าของ $\sqrt{|\bar{u} + \bar{v}|^2}$ จะได้ค่าของ $|\bar{u} + \bar{v}|$)

หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 263 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

4. ครูให้นักเรียนอ่าน “คณิตน่ารู้” ในหนังสือเรียน หน้า 263 ดังนี้

ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ แล้ว

1) $|\bar{u} + \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + 2\bar{u} \cdot \bar{v} + |\bar{v}|^2$

2) $|\bar{u} - \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 - 2\bar{u} \cdot \bar{v} + |\bar{v}|^2$

5. ครูให้นักเรียนพิสูจน์ “คณิตน่ารู้” เป็นจริงหรือไม่ โดยครูกำหนดให้ $\bar{u} = 4\bar{i} + 2\bar{j} - 5\bar{k}$ และ $\bar{v} = 5\bar{i} - 3\bar{j} + 3\bar{k}$ และให้นักเรียนร่วมกันแสดงการพิสูจน์

ขั้นลงมือทำ (Doing)

1. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วให้ทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ดังนี้

- ให้นักเรียนทำ “ใบงานที่ 3.4 ผลคูณเชิงสเกลาร์”
- ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจร่วมกัน หลังจากนั้นครูสุ่มนักเรียนในแต่ละกลุ่มออกมาเฉลยคำตอบ และให้นักเรียนทั้งร่วมกันอภิปรายแสดงความเห็น

2. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 3.4 ในหนังสือเรียนหน้า 264 เป็นการบ้าน

ขั้นสรุป

ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นอย่างไร

  (**แนวตอบ** ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นสเกลาร์)

- เวกเตอร์สองเวกเตอร์จะตั้งฉากกันเมื่อใด

  (**แนวตอบ** ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ทั้งสอง ได้ผลลัพธ์เป็น 0)

- มุม θ ซึ่งเป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ หาได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** หาได้จากสูตร $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$)

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้			
1) ผลคูณเชิงสเกลาร์	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 3.4 - ตรวจ Exercise 3.4 - ตรวจใบงานที่ 3.4	- แบบฝึกทักษะ 3.4 - Exercise 3.4 - ใบงานที่ 3.4	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

20) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เวกเตอร์ในสามมิติ

21) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เวกเตอร์ในสามมิติ

22) ใบงานที่ 3.4 เรื่อง ผลคูณเชิงสเกลาร์

แหล่งการเรียนรู้

1) ห้องสมุด
2) แหล่งชุมชน
3) อินเทอร์เน็ต

ใบงานที่ 3.4

เรื่อง ผลคูณเชิงสเกลาร์

<u>คำชี้แจง</u> : ให้นักเรียนแสดงวิธีการหาคำตอบโดยละเอียด

1) กำหนดให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ และ $\bar{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ จงหาค่า $(\bar{u} \cdot \bar{v})\,\bar{w}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) กำหนดให้ $\bar{u} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$ และ $\bar{v} = 4\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}$ จงหาค่า $\bar{u} \cdot \bar{v}$

.....

.....

.....

.....

3) จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$, $\bar{v}$ เมื่อกำหนด $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$ และ $\bar{v} = 4\bar{i} + 3\bar{k}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4) จงหาค่า m ที่ทำให้ $\bar{a} = m\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$ ตั้งฉากกับ $\bar{b} = 2m\bar{i} + m\bar{j} - 4\bar{k}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5) กำหนดให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ จงแสดงว่า $|\bar{u} + \bar{v}|^2 + |\bar{u} - \bar{v}|^2 = 2|\bar{u}|^2 + 2|\bar{v}|^2$

.....

.....

.....

.....

ใบงานที่ 3.4 เฉลย

เรื่อง ผลคูณเชิงสเกลาร์

<u>คำชี้แจง</u> : ให้นักเรียนแสดงวิธีการหาคำตอบโดยละเอียด

1) กำหนดให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ และ $\bar{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ จงหาค่า $(\bar{u} \cdot \bar{v})\,\bar{w}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= (4)(2) + (-3)(-1) + (0)(-2)$$

$$= 8 + 3 + 0$$

$$= 11$$

$$(\bar{u} \cdot \bar{v})\,\bar{w} = 11\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 \\ -22 \\ 22 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $(\bar{u} \cdot \bar{v})\,\bar{w}$ มีค่าเท่ากับ $\begin{bmatrix} 11 \\ -22 \\ 22 \end{bmatrix}$ หรือ $11\bar{i} - 22\bar{j} + 22\bar{k}$

2) กำหนดให้ $\bar{u} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$ และ $\bar{v} = 4\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}$ จงหาค่า $\bar{u} \cdot \bar{v}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = (2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}) \cdot (4\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k})$$

$$= (2)(4) + (-1)(3) + (3)(-2)$$

$$= 8 - 3 - 6$$

$$= -1$$

ดังนั้น $(\bar{u} \cdot \bar{v})$ มีค่าเท่ากับ -1

3) จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$, $\bar{v}$ เมื่อกำหนด $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$ และ $\bar{v} = 4\bar{i} + 3\bar{k}$

<u>วิธีทำ</u> จาก $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = (\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}) \cdot (4\bar{i} + 3\bar{k})$

$= (1)(4) + (2)(0) + (-2)(3)$

$= 4 + 0 - 6$

$= -2$

$|\bar{u}| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{1 + 4 + 4}$

$= \sqrt{9}$

$= 3$

$|\bar{u}| = \sqrt{(4)^2 + (0)^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{16 + 0 + 9}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$

จะได้ $\cos\theta = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}$

$= \frac{-2}{(3)(5)}$

$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{2}{(3)(5)}\right)$

ดังนั้น มุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$, $\bar{v}$ เท่ากับ $\cos^{-1}\left(-\frac{2}{(3)(5)}\right)$ หรือ $\arccos\left(-\frac{2}{(3)(5)}\right)$

4) จงหาค่า m ที่ทำให้ $\bar{a} = m\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$ ตั้งฉากกับ $\bar{b} = 2m\bar{i} + m\bar{j} - 4\bar{k}$

<u>วิธีทำ</u> จาก $\bar{a} \perp \bar{b}$ เมื่อ $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$

จะได้ $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$

$$(m\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}) \cdot (2m\bar{i} + m\bar{j} - 4\bar{k}) = 0$$

$$2m^2 - 2m - 4 = 0$$

$$(2m + 2)(m - 2) = 0$$

$$m = -1, 2$$

ดังนั้น ค่า m ที่ทำให้ $\bar{a} \perp \bar{b}$ คือ -1 หรือ 2

5) กำหนดให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ จงแสดงว่า $|\bar{u} + \bar{v}|^2 + |\bar{u} - \bar{v}|^2 = 2|\bar{u}|^2 + 2|\bar{v}|^2$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $|\bar{u} + \bar{v}|^2 = (\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} + \bar{v})$

$$= \bar{u} \cdot \bar{u} + 2\bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \bar{v}$$

$$= |\bar{u}|^2 + 2\bar{u} \cdot \bar{v} + |\bar{v}|^2 \quad \text{---------- (1)}$$

และ $|\bar{u} - \bar{v}|^2 = (\bar{u} - \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v})$

$$= \bar{u} \cdot \bar{u} - 2\bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \bar{v}$$

$$= |\bar{u}|^2 - 2\bar{u} \cdot \bar{v} + |\bar{v}|^2 \quad \text{---------- (2)}$$

(1) + (2); $|\bar{u}|^2 + 2\bar{u} \cdot \bar{v} + |\bar{v}|^2 + |\bar{u}|^2 - 2\bar{u} \cdot \bar{v} + |\bar{v}|^2 = 2|\bar{u}|^2 + 2|\bar{v}|^2$

ดังนั้น $|\bar{u} + \bar{v}|^2 + |\bar{u} - \bar{v}|^2 = 2|\bar{u}|^2 + 2|\bar{v}|^2$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 23

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ **จำนวน 19 ชั่วโมง**

เรื่อง ผลคูณเชิงเวกเตอร์ **จำนวน 3 ชั่วโมง**

ผู้สอน นางพิณญาภัสส์ ทิพย์นัสกุล **โรงเรียนสตรีศึกษา**

ผลการเรียนรู้

48) หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ หาผลคูณเชิงสเกลาร์ และผลคูณเชิงเวกเตอร์

49) นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

1) คำนวณผลคูณเชิงเวกเตอร์ได้ (K)
2) ใช้ความรู้ ทักษะ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม (P)
3) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ผลคูณเชิงเวกเตอร์

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ $\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ คือ $\begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}$ หรือ

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \bar{k}$$

เขียนแทนผลคูณเวกเตอร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ด้วย $\bar{u} \times \bar{v}$ อ่านว่า **เวกเตอร์ยูครอสเวกเตอร์วี**

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร	1. มีวินัย
2. ความสามารถในการคิด	2. ใฝ่เรียนรู้

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
22) ทักษะการเชื่อมโยง 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้

📖 **แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching**

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

ขั้นการใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

1. ครูทบทวนเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ เช่น ครูใช้คำถามว่าเวกเตอร์ศูนย์เขียนได้อย่างไร

   (แนวตอบ $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$)

2. ครูทบทวนกฎมือขวา ในการหาทิศทางของผลคูณเชิงเวกเตอร์ ได้ดังรูปหน้า 256
3. ครูอธิบายความรู้เกี่ยวกับผลคูณเชิงเวกเตอร์ ว่าการหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ ต้องนำความรู้จากสมบัติ $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$ และการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปรมาใช้

เช่น $\bar{u} = u_1\bar{\imath} + u_2\bar{\jmath} + v_3\bar{k}, \bar{v} = v_1\bar{\imath} + v_2\bar{\jmath} + v_3\bar{k}$

และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ จะได้สมการ $\bar{u} \cdot \bar{w} = 0$ และ $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0$ จัดรูปสมการสองสมการและแก้ระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปรจะได้เวกเตอร์ $\bar{w}$ มีการนำความรู้เกี่ยวกับการหาดีเทอร์มิแนนต์มาเขียนเวกเตอร์$\bar{w}$ ในรูป $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$ และ $\bar{k}$

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

1. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาบทนิยามของผลคูณเชิงเวกเตอร์ และอธิบายเพิ่มเติม

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ $\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ คือ

$\begin{bmatrix} U_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$

เขียนแทนผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ด้วย $\bar{u} \times \bar{v}$ อ่านว่า **เวกเตอร์ยูครอสเวกเตอร์วี**

2. ครูอธิบายความรู้เพิ่มเติมในกรอบคณิตน่ารู้ หน้า 265 ว่า “การหาผลคูณเชิงเวกเตอร์สามารถหาได้ในระบบพิกัดฉากสามมิติเท่านั้น”

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

3. ครูยกตัวอย่างที่ 33 ในหนังสือเรียน หน้า 266 โดยแสดงวิธีทำอย่างละเอียดบนกระดาน จากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 266

4. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 34 ในหนังสือเรียนหน้า 266 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- จากตัวอย่างที่ 34 นักเรียนสังเกตเห็นความสัมพันธ์อะไรหรือไม่

(**แนวตอบ** นักเรียนอาจตอบว่าเห็นหรือไม่เห็นก็ได้ แต่ครูควรชี้แนะให้นักเรียนสังเกตเห็นว่า $\bar{u} \times \bar{v} \neq \bar{v} \times \bar{u}$)

5. หลังจากนั้นครูอธิบายความรู้เพิ่มเติมในกรอบ “คณิตน่ารู้” ในหนังสือเรียน หน้า 266 ว่า “จากตัวอย่างที่ 34 จะเห็นว่า $\bar{u} \times \bar{v}$ และ $\bar{v} \times \bar{u}$ เป็นนิเสธซึ่งกันและกัน” หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 266 เมื่อนักเรียนทำเสร็จ ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

ลงมือทำ (Doing)

1. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วให้ทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ดังนี้

- ให้นักเรียนทำ “Thinking Time” ในหนังสือเรียน หน้า 266
- ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจร่วมกัน หลังจากนั้นครูสุ่มนักเรียนในแต่ละกลุ่มออกมาเฉลยคำตอบ และให้นักเรียนทั้งร่วมกันอภิปรายแสดงความเห็น

(**แนวตอบ** กำหนด $\bar{u}, \bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในสามมิติ ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่ ถ้า $\bar{u} \times \bar{v} = \bar{u} \times \bar{w}$ แล้ว $\bar{v} = \bar{w}$

เมื่อกำหนดให้ $\bar{u} = 2\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}, \bar{v} = \bar{i} - 3\bar{j} + 3\bar{k}$ และ $\bar{w} = \bar{i} - 3\bar{j} + 3\bar{k}$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\bar{k}$$
$$= (6-9)\bar{i} - (6+3)\bar{j} + (-6-2)\bar{k}$$
$$= -3\bar{i} - 9\bar{j} + (-8)\bar{k}$$
$$\bar{u} \times \bar{w} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\bar{k}$$
$$= (6-9)\bar{i} - (6+3)\bar{j} + (-6-2)\bar{k}$$
$$= -3\bar{i} - 9\bar{j} + (-8)\bar{k})$$

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นสอน

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

1. ครูยกตัวอย่างที่ 35 ในหนังสือเรียน หน้า 267 โดยแสดงวิธีทำอย่างละเอียดบนกระดานและให้นักเรียนศึกษาไปพร้อมกันแล้วแลกเปลี่ยนความรู้กัน จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- จากตัวอย่างที่ 35 นักเรียนสังเกตเห็นความสัมพันธ์อะไรหรือไม่

(**แนวตอบ** นักเรียนอาจตอบว่าเห็นหรือไม่เห็นก็ได้ แต่ครูควรชี้แนะให้นักเรียนสังเกตเห็นว่า $(k\bar{u}) \times \bar{v} = k(\bar{u} \times \bar{v})$)

หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 267 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

2. ครูให้นักเรียนร่วมกันสังเกตว่าตัวอย่างที่ 34 – 35 มีผลคูณเชิงเวกเตอร์เป็นจริงตามสมบัติต่าง ๆ จากนั้นครูอธิบายสมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์ หน้า 267

3. ครูให้นักเรียนศึกษาการพิสูจน์สมบัติข้อที่ 3) ในหนังสือเรียน หน้า 268 หลังจากนั้นครูสุ่มนักเรียนออกมาอธิบายการพิสูจน์ ในหนังสือเรียน หน้า 268

ลงมือทำ (Doing)

1. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วให้ทำกิจกรรม

คณิตศาสตร์ ดังนี้

- ให้นักเรียนทำ “ใบงาน 3.5 เรื่อง ผลคูณเชิงเวกเตอร์”
- ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจร่วมกัน หลังจากนั้นครูลุ่มนักเรียนในแต่ละกลุ่มออกมาเฉลยคำตอบ และให้นักเรียนทั้งร่วมกันอภิปรายแสดงความเห็น

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นสอน

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

1. ครูยกตัวอย่างที่ 36 ในหนังสือเรียน หน้า 269 โดยแสดงวิธีทำอย่างละเอียดบนกระดานและให้นักเรียนศึกษาไปพร้อมกันแล้วแลกเปลี่ยนความรู้กัน จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- ไซน์ของมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ หาได้อย่างไร

  (**แนวตอบ** หาได้จากสูตร $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}| \sin\theta$)

หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 269 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

2. ครูยกตัวอย่างที่ 37 ในหนังสือเรียน หน้า 269 โดยแสดงวิธีทำอย่างละเอียดบนกระดานและให้นักเรียนศึกษาไปพร้อมกันแล้วแลกเปลี่ยนความรู้กัน จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- จากตัวอย่างที่ 37 ค่าของ $\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})$ มีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = 0$)

- จากตัวอย่างที่ 37 ค่าของ $\bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})$ มีค่าเท่าใด

  (**แนวตอบ** $\bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = 0$)

- จากตัวอย่างที่ 37 นักเรียนสังเกตเห็นความสัมพันธ์อะไรหรือไม่

  (**แนวตอบ** *นักเรียนอาจตอบว่าเห็นหรือไม่เห็นก็ได้*)

หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 270 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู” จากนั้นครูอธิบายความรู้เพิ่มเติมในกรอบ “คณิตน่ารู้” ในหนังสือเรียน หน้า 270 ว่า “ถ้า $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ แล้ว $\bar{u} \times \bar{v} = \bar{0}$ ถ้า $\bar{u} \times \bar{v}$ **เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉาก**กับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ จะได้ว่า $\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = 0$ *และ* $\bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = 0$”

ลงมือทำ (Doing)

1. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วให้ทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ดังนี้

- ให้นักเรียนทำ “แบบฝึกทักษะ 3.5” ในหนังสือเรียน หน้า 270
- ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจร่วมกัน หลังจากนั้นครูลุ่มนักเรียนในแต่ละกลุ่มออกมาเฉลยคำตอบ และให้นักเรียนทั้งร่วมกันอภิปรายแสดงความเห็น

ขั้นสรุป

1. ครูถามคำถามเพื่อประเมินความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้
   - ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เขียนแทนสัญลักษณ์ได้อย่างไร และอ่านได้อย่างไร
     (**แนวตอบ** เขียนแทนด้วย $\bar{u} \times \bar{v}$ อ่านว่า เวกเตอร์ยูครอสเวกเตอร์วี)
   - ผลคูณเชิงเวกเตอร์นำความรู้เรื่องใดมาใช้บ้าง
     (**แนวตอบ** สมบัติ $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$ และการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปร)

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้			
1) ผลคูณเชิงเวกเตอร์	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 3.5 - ตรวจ Exercise 3.5 - ตรวจใบงานที่ 3.5	- แบบฝึกทักษะ 3.5 - Exercise 3.5 - ใบงานที่ 3.5	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

23) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เวกเตอร์ในสามมิติ

24) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เวกเตอร์ในสามมิติ

25) ใบงาน 3.5 เรื่อง ผลคูณเชิงเวกเตอร์

แหล่งการเรียนรู้

1) ห้องสมุด
2) แหล่งชุมชน
3) อินเทอร์เน็ต

ใบงานที่ 3.5

เรื่อง ผลคูณเชิงเวกเตอร์

<u>คำชี้แจง</u> : จงหาเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. จงหา $\bar{u} \times \bar{v}$ เมื่อกำหนด $\bar{u} = 6\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}$ และ $\bar{v} = 2\bar{i} - 4\bar{j} + 5\bar{k}$

.....

.....

.....

.....

2. จงหา $\bar{u} \times (k\bar{v})$ และ $k(\bar{u} \times \bar{v})$ เมื่อกำหนด $\bar{u} = 2\bar{i} - 4\bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{v} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$ และ k = 3

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ใบงานที่ 3.5

เฉลย

เรื่อง ผลคูณเชิงเวกเตอร์

<u>คำชี้แจง</u> : จงหาเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. จงหา $\bar{u} \times \bar{v}$ เมื่อกำหนด $\bar{u} = 6\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}$ และ $\bar{v} = 2\bar{i} - 4\bar{j} + 5\bar{k}$

<u>วิธีทำ</u> $\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}\bar{k}$

$= (15 - 8)\bar{i} - (30 + 4)\bar{j} + (-24 - 6)\bar{k}$

$= 7\bar{i} - 34\bar{j} - 30\bar{k}$

2. จงหา $\bar{u} \times (k\bar{v})$ และ $k(\bar{u} \times \bar{v})$ เมื่อกำหนด $\bar{u} = 2\bar{i} - 4\bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{v} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$ และ k = 3

<u>วิธีทำ</u> จาก $k\bar{v} = 3(3\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k})$

$= (9\bar{i} + 6\bar{j} + 3\bar{k})$

จะได้ $\bar{u} \times (k\bar{v}) = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}\bar{k}$

$= (-12 - 30)\bar{i} - (6 - 45)\bar{j} + (12 + 36)\bar{k}$

$= -42\bar{i} + 39\bar{j} + 48\bar{k}$

และจาก $\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\bar{k}$

$= (-4 - 10)\bar{i} - (2 - 15)\bar{j} + (4 + 12)\bar{k}$

$= -14\bar{i} + 13\bar{j} + 16\bar{k}$

จะได้ $k(\bar{u} \times \bar{v}) = 3\left(-14\bar{\imath} + 13\bar{\jmath} + 16\bar{k}\right)$

$= -42\bar{\imath} + 39\bar{\jmath} + 48\bar{k}$