

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จำนวน 40 ชั่วโมง

เรื่อง การวัดความยาวส่วนโค้งและพิสัยของจุดปลายส่วนโค้ง

จำนวน 2 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

ผลการเรียนรู้

- 1) เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและ นำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- 2) แก่สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- 3) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) บอกวิธีการหาความยาวส่วนโค้งและพิสัยของจุดปลายส่วนโค้งได้ (K)
- 2) แสดงการหาความยาวส่วนโค้งและพิสัยของจุดปลายส่วนโค้งได้ (P)
- 3) รับผิดชอบต่อน้ำที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

ถ้า $\theta > 0$ ให้วัดจากจุด $(1, 0)$ ไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เป็นระยะ θ หน่วย หรือ วัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา θ มีค่าเป็นบวก

ถ้า $\theta < 0$ ให้วัดจากจุด $(1, 0)$ ไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา เป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย(ระยะทางเป็นบวกเสมอ) หรือ วัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา θ เป็นลบ

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร	1. มีวินัย
2. ความสามารถในการคิด	2. ใฝ่เรียนรู้

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1) ทักษะการสำรวจ ค้นหา 2) ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้



แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : นิรนัย (Deductive Method)

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

ขั้นเตรียม

1. ครูกล่าวทักทายนักเรียน และแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ หลังจากนั้นครูถามคำถามหน้าหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ในหนังสือเรียน หน้า 2

** หมายเหตุ ครูยังไม่เฉลยคำตอบของคำถามหน้าหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 แต่จะเฉลยในคาบสุดท้ายของหน่วยการเรียนรู้ที่ 1

2. ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียน โดยให้นักเรียนศึกษาความรู้ก่อนเรียน ในหนังสือเรียน หน้า 3 และใช้การถามตอบอีกครั้งเพื่อตรวจสอบว่านักเรียนได้ศึกษาความรู้ก่อนเรียน โดยครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- คู่อันดับ (3, -2) อยู่ในจุดภาคใด

(แนวตอบ จุดภาคที่ 2)

- กำหนดให้ $x^2 + 36 = 100$ แล้ว x มีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $x = 8$)

- นักเรียนหาคำตอบมาได้อย่างไร

(แนวตอบ นักเรียนสามารถตอบได้อย่างหลากหลายขึ้นกับยุทธวิธีที่นักเรียนใช้ในการหาคำตอบ)

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดพื้นฐานความรู้ก่อนเรียน โดยการสแกน QR Code ในหนังสือเรียน หน้า 3

3. ครูให้นักเรียนร่วมกันตอบคำถามเพิ่มเติมเพื่อเชื่อมโยงเข้าสู่เรื่อง การวัดความยาวส่วนโค้งและพิกัดของ

จุดปลายส่วนโค้ง ว่า สูตรการหาความยาวเส้นรอบวงของวงกลมมีสูตรว่าอะไร

(คำตอบ $2\pi r$)

4. ครูวาดรูปวงกลมที่มีรัศมีหนึ่งหน่วยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ บนกระดานพร้อมระบุพิกัด $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$ และ $(0, -1)$ แล้วถามนักเรียนว่า วงกลมรูปนี้มีความยาวเส้นรอบวงเท่ากับเท่าไร โดยหาจากสูตรการหาความยาวเส้นรอบรูปของวงกลม

(คำตอบ $2\pi(1)=2\pi$)

ชั้นสอน

ชั้นสอนหรือแสดง

1. ครูอธิบายว่า วงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อวัดระยะจากจุด $(1, 0)$ ไปบนส่วนโค้งของวงกลมเป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย (ระยะทางเป็นบวกเสมอ) จะมีจุดสิ้นสุดเพียง 1 จุดเท่านั้น คือ จุดปลายส่วนโค้งคู่อันดับ (x, y) ดังรูปที่ 1 ในหนังสือเรียน หน้า 4
2. ครูให้นักเรียนพิจารณารูปที่ 1 ในหนังสือเรียน หน้า 4 แล้วอธิบายกับนักเรียนว่า ถ้า $\theta > 0$ ให้วัดจากจุด $(1, 0)$ ไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเป็นระยะ θ หน่วย หรือ วัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาแล้ว θ มีค่าเป็นบวก
3. ครูให้นักเรียนพิจารณารูปที่ 2 ในหนังสือเรียน หน้า 4 แล้วอธิบายกับนักเรียนว่าถ้า $\theta < 0$ ให้วัดจากจุด $(1, 0)$ ไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาเป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย (ระยะทางเป็นบวกเสมอ) หรือ วัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกาแล้ว θ เป็นลบ

ชั่วโมงที่ 2

ชั้นเปรียบเทียบและรวบรวม

4. ครูกล่าวว่า จากความรู้เดิมคือ ความยาวเส้นรอบวงของรูปวงกลมหนึ่งหน่วยเท่ากับ 2π
5. ครูอธิบายว่าในรูปที่ 3 ในหนังสือเรียน หน้า 5 เป็นการแสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยเมื่อวัดระยะจากจุด $(1, 0)$ ไปบนส่วนโค้งของวงกลมเป็นระยะ $\theta = \frac{\pi}{2}$ หรือ $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ คือ วงกลมรัศมี 1 หน่วย ถูกแบ่งเป็น 4 ส่วน เท่า ๆ กัน และวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา θ มีค่าเป็นบวก
6. ครูกล่าวว่าในทำนองเดียวกัน รูปที่ 4 ในหนังสือเรียน หน้า 5 เป็นการแสดงตำแหน่งของจุดปลาย

ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อวัดระยะจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมเป็นระยะ $\theta = \pi$ หรือ

$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ ทำในทำนองเดียวกันนี้ จนถึงรูปที่ 7 จะเห็นว่าตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย

วัดระยะจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมเป็นระยะ

$$\theta = 2\pi + \frac{\pi}{2}$$
$$\theta = \frac{5\pi}{2}$$

คือ $|\theta| > 2\pi$ แสดงว่าวัดความยาวส่วนโค้งจากจุด (1, 0) เกิน 1 รอบ

7. ครูอธิบายว่าในรูปที่ 8 ในหนังสือเรียน หน้า 5 เป็นการแสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อวัดระยะจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมเป็นระยะ $\theta = -\frac{\pi}{2}$ คือ วงกลมรัศมี 1 หน่วย ถูกแบ่งเป็น 4 ส่วน เท่า ๆ กัน แต่วัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา θ มีค่าเป็นลบ

8. ครูกล่าวว่าในทำนองเดียวกัน รูปที่ 9 ในหนังสือเรียน หน้า 6 เป็นการแสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อวัดระยะจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมเป็นระยะ $\theta = -\pi$ และทำในทำนองเดียวกันนี้ จนถึงรูปที่ 12 จะเห็นว่าตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย วัดระยะจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมเป็นระยะ

$$\theta = (-2\pi) + (-2\pi) + \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\theta = -\frac{9\pi}{2}$$

คือ $|\theta| > 2\pi$ แสดงว่าวัดความยาวส่วนโค้งจากจุด (1, 0) เกิน 1 รอบแต่วัดในทิศตามเข็มนาฬิกา

ขั้นสรุป

ขั้นสรุป

1. ครูให้นักเรียนอ่าน “คณิตน่ารู้” ในหนังสือเรียน หน้า 6 และครูกล่าวว่า “วงกลมหนึ่งหน่วยจะมีเส้นรอบวงยาวเท่ากับ $2\pi(1) = 2\pi$ หน่วย” ซึ่งตรงกับที่หาไว้ข้างต้น

2. ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- ถ้า $\theta > 0$ ให้วัดจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยไปในทิศทาง

ทวนเข็มนาฬิกาเป็นระยะ θ หน่วย หรือ วัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาแล้ว θ มีค่าเป็นจำนวนใด

(แนวตอบ เป็นบวก)

- ถ้า $\theta < 0$ ให้วัดจากจุด $(1, 0)$ ไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาเป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย (ระยะทางเป็นบวกเสมอ) หรือ วัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา แล้ว θ มีค่าเป็นจำนวนใด

(แนวตอบ เป็นลบ)

ชั้นนำไปใช้

3. ครูให้นักเรียนร่วมกันตอบคำถาม “Thinking Time”

(แนวตอบข้อ 1. รูปที่ 3 $\theta = -\frac{9\pi}{2}$ รูปที่ 4 $\theta = \pi$

รูปที่ 5 $\theta = \frac{3\pi}{2}$

รูปที่ 6 $\theta = 2\pi$

รูปที่ 7 $\theta = \frac{5\pi}{2}$

รูปที่ 8 $\theta = -\frac{\pi}{2}$

รูปที่ 9 $\theta = -\pi$

รูปที่ 10 $\theta = -\frac{3\pi}{2}$

รูปที่ 11 $\theta = -2\pi$

รูปที่ 12 $\theta = -\frac{9\pi}{2}$

แนวตอบข้อ 2. รูปที่ 3, 7, 10

รูปที่ 4, 9

รูปที่ 3, 8, 12

รูปที่ 6, 11

แนวตอบข้อ 3. เป็นจุดเดียวกันได้ แต่ θ ไม่เท่ากัน)

4. ครูให้นักเรียนเขียนสรุปความรู้รวบยอดเรื่อง การวัดความยาวส่วนโค้งและพิสัยของจุดปลายส่วนโค้ง และตอบคำถาม “Thinking Time” ลงในสมุด

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
1. การประเมินก่อนเรียน - แบบทดสอบก่อนเรียน หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	- ตรวจแบบทดสอบ ก่อนเรียน	- แบบทดสอบก่อน เรียน	- ประเมินตามสภาพจริง
2. ประเมินระหว่างการจัด กิจกรรมการเรียนรู้ 1) วิธีการหาความยาว ส่วนโค้งและพิสัยของจุด ปลายส่วนโค้ง	- ตรวจใบงานที่ 1.1	- ใบงานที่ 1.1	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอ ผลงาน	- แบบประเมินการ นำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงาน รายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกต พฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่น ในการทำงาน	- แบบประเมิน คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- 3) ใบงานที่ 1.1 เรื่อง การหาตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย

แหล่งการเรียนรู้

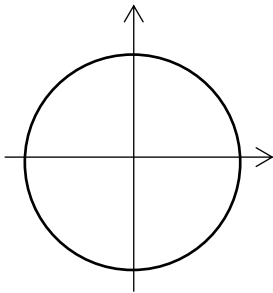
- 1) ห้องสมุด
- 2) แหล่งชุมชน

ใบงานที่ 1.1

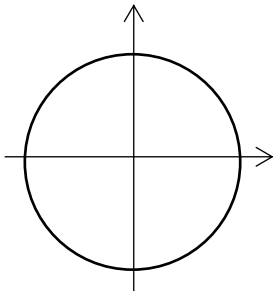
เรื่อง การหาตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย

คำชี้แจง : จงเขียนตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยจาก θ ที่กำหนดให้

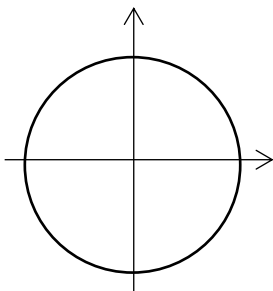
1. $\theta = \pi$



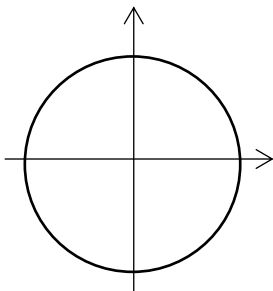
2. $\theta = \frac{3\pi}{2}$



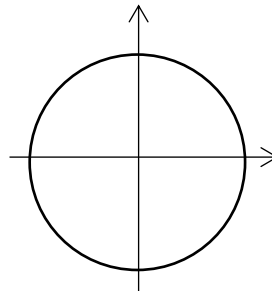
3. $\theta = 2\pi$



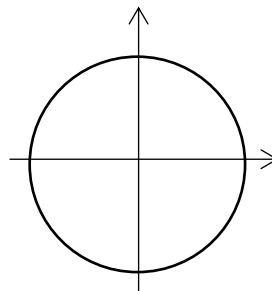
4. $\theta = \frac{7\pi}{2}$



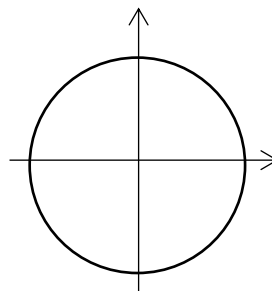
5. $\theta = -\frac{\pi}{2}$



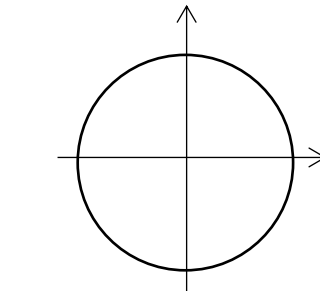
6. $\theta = -\pi$



7. $\theta = -2\pi$



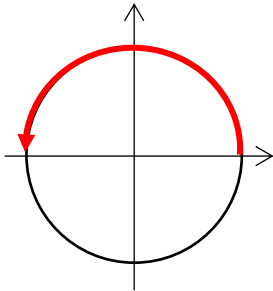
8. $\theta = -\frac{7\pi}{2}$



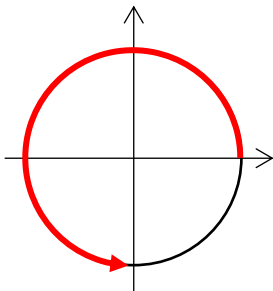
เรื่อง การหาตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย

คำชี้แจง จงเขียนตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยจาก θ ที่กำหนดให้

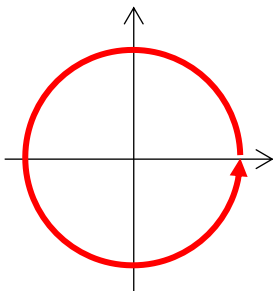
1. $\theta = \pi$



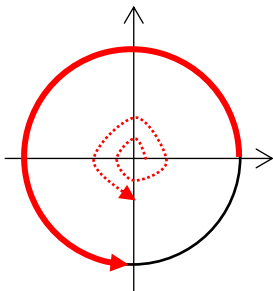
2. $\theta = \frac{3\pi}{2}$



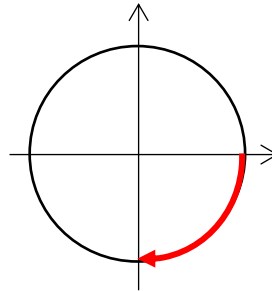
3. $\theta = 2\pi$



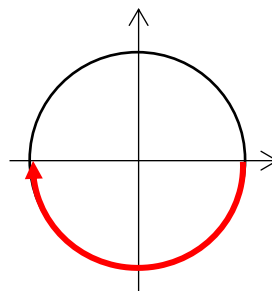
4. $\theta = \frac{7\pi}{2}$



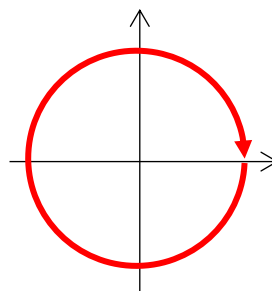
5. $\theta = -\frac{\pi}{2}$



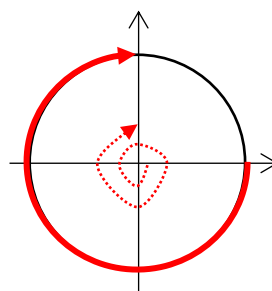
6. $\theta = -\pi$



7. $\theta = -2\pi$



8. $\theta = -\frac{7\pi}{2}$



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จำนวน 40 ชั่วโมง

เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์

จำนวน 5 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

ผลการเรียนรู้

- 1) เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและ นำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- 2) แก่สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- 3) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) บอกวิธีการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ได้ (K)
- 2) แสดงการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ได้ (P)
- 3) รับผิดชอบต่อน้ำที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของ $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

สามารถหาได้โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย หรือการพิจารณากราฟของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์

ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

- 1) การหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \text{ และ } \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \text{ เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

- 2) การหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \text{ และ } \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \text{ เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

3) การหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha \text{ และ } \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha \text{ เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

4) การหาค่า $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\theta > 2\pi$

$\theta = 2n\pi + \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $0 \leq \alpha < 2\pi$ จะได้ว่า

$$\sin(2n\pi + \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(2n\pi + \alpha) = \cos\alpha$$

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการสำรวจ ค้นหา 2) ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้



แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : อุปนัย (Inductive Method)

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

ขั้นเตรียม

ทบทวนความรู้เดิมเรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ และวงกลมหนึ่งหน่วย ให้นักเรียน โดยการใช้คำถาม ดังนี้

- อัตราส่วนตรีโกณมิติ หมายถึงอัตราส่วนใด

(แนวตอบ อัตราส่วนตรีโกณมิติ หมายถึง อัตราส่วนของด้านคู่ใดคู่หนึ่งบนรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก)

- ถ้าวัดจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

เป็นระยะ θ หน่วย หรือ วัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาแล้ว θ มีค่าเป็นจำนวนใด

(แนวตอบ เป็นบวก)

- ถ้า $\theta < 0$ ให้วัดจากจุด $(1, 0)$ ไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา เป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย (ระยะทางเป็นบวกเสมอ) หรือ วัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา แล้ว θ มีค่าเป็นจำนวนใด

(แนวตอบ เป็นลบ)

ชั้นสอน

ชั้นสอนหรือแสดง

1. ครูให้นักเรียนพิจารณารูปที่ 13 ในหนังสือเรียน หน้า 7 แล้วกล่าวว่า ค่าของ θ หนึ่งค่า จะกำหนดพิกัด (x, y) ซึ่งเป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยได้เพียงพิกัดเดียว นั่นคือ θ หนึ่งค่า กำหนดค่าของ x ได้หนึ่งค่า และ กำหนดค่าของ y ได้หนึ่งค่า
2. ครูให้นักเรียนศึกษาตารางในหนังสือเรียน หน้า 7 และกล่าวว่าสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง θ กับ x ได้ ดังนี้

$$\left\{ (0, 1), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), (\pi, -1), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), (2\pi, 1) \right\}$$

ถ้า f เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง θ กับ x ซึ่งไม่มีสองคู่อันดับใดใช้สมาชิกตัวหน้าซ้ำกัน

จะได้ว่า $f = \{(\theta, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x = f(\theta)\}$

เรียกความสัมพันธ์นี้ว่า ฟังก์ชันโคไซน์ เมื่อ $x = \text{cosine } \theta$ หรือ $x = \cos \theta$

ดังนั้น $f = \{(\theta, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x = \cos \theta\}$

3. ครูกล่าวต่อไปอีกว่าจากตารางในหนังสือเรียน หน้า 7 จะเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง θ กับ y ได้ ดังนี้

$$\left\{ (0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), (\pi, 0), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), (2\pi, 0) \right\}$$

ถ้า g เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง θ กับ y ซึ่งไม่มีสองคู่อันดับใดใช้สมาชิกตัวหน้าซ้ำ

จะได้ว่า $g = \{(\theta, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = g(\theta)\}$

เรียกความสัมพันธ์นี้ว่า ฟังก์ชันไซน์ เมื่อ $y = \text{sine } \theta$ หรือ $y = \sin \theta$

ดังนั้น $g = \{(\theta, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = \sin \theta\}$

ชั่วโมงที่ 2

1. ครูให้นักเรียนดูรูปที่ 14 ในหนังสือเรียน หน้า 8 จากนั้นครูกล่าวว่า ครูกล่าวว่าจากรูปที่ 14 จะเห็นว่าจุดปลายส่วนโค้งมีพิกัด (x, y) จะเขียนแทนด้วย $(\cos \theta, \sin \theta)$

2. ครูและนักเรียนร่วมกันศึกษาตัวอย่างที่ 1 ในหนังสือเรียน หน้า 8

ข้อ 1. $\theta = \pi$ เขียนในรูป $(\cos \theta, \sin \theta)$ ได้เป็น $(\cos \pi, \sin \pi)$

ข้อ 2. $\theta = \frac{\pi}{2}$ เขียนในรูป $(\cos \theta, \sin \theta)$ ได้เป็น $(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2})$

ข้อ 3. $\theta = -2\pi$ เขียนในรูป $(\cos \theta, \sin \theta)$ ได้เป็น $(\cos (-2\pi), \sin (-2\pi))$

ข้อ 4. $\theta = -\frac{3\pi}{2}$ เขียนในรูป $(\cos \theta, \sin \theta)$ ได้เป็น $(\cos (-\frac{3\pi}{2}), \sin (-\frac{3\pi}{2}))$

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 8 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

3. ครูและนักเรียนร่วมกันศึกษาตัวอย่างที่ 2 ในหนังสือเรียน หน้า 9 และกล่าวว่านักเรียนจะเห็นว่าจากความสัมพันธ์ $x = \cos \theta$ และ $y = \sin \theta$ จะได้ว่า ที่ θ เท่ากับค่าใด ๆ นั่นคือ จุดปลายส่วนโค้งจะกำหนดพิกัด (x, y) ซึ่งเป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยได้เพียงพิกัดเดียว จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- ข้อ 1) $\sin 0$ มีค่าเท่าใด พิจารณาค่า x หรือ y ที่ θ เท่าใด

(แนวตอบ $\sin 0 = 0$ นั่นคือ พิจารณาค่าของ y ที่ $\theta = 0$)

- ข้อ 2) $\cos \frac{\pi}{2}$ มีค่าเท่าใด พิจารณาค่า x หรือ y ที่ θ เท่าใด

(แนวตอบ $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ นั่นคือ พิจารณาค่าของ x ที่ $\theta = \frac{\pi}{2}$)

- ข้อ 3) $\sin \frac{3\pi}{2}$ มีค่าเท่าใด พิจารณาค่า x หรือ y ที่ θ เท่าใด

(แนวตอบ $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ นั่นคือ พิจารณาค่าของ y ที่ $\theta = \frac{3\pi}{2}$)

- ข้อ 4) $\cos 2\pi$ มีค่าเท่าใด พิจารณาค่า x หรือ y ที่ θ เท่าใด

(แนวตอบ $\cos 2\pi = 1$ นั่นคือ พิจารณาค่าของ x ที่ $\theta = 2\pi$)

- ข้อ 5) $\sin \left(-\frac{\pi}{2}\right)$ มีค่าเท่าใด พิจารณาค่า x หรือ y ที่ θ เท่าใด

(แนวตอบ $\sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ นั่นคือ พิจารณาค่าของ y ที่ $\theta = -\frac{\pi}{2}$)

- ข้อ 6) $\cos \left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ มีค่าเท่าใด พิจารณาค่า x หรือ y ที่ θ เท่าใด

(แนวตอบ $\cos \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ นั่นคือ พิจารณาค่าของ x ที่ $\theta = -\frac{3\pi}{2}$)

- ข้อ 7) $\sin(-\pi)$ มีค่าเท่าใด พิจารณาค่า x หรือ y ที่ θ เท่าใด
(แนวตอบ $\sin(-\pi) = 0$ นั่นคือ พิจารณาค่าของ y ที่ $\theta = -\pi$)
- ข้อ 8) $\cos(-2\pi)$ มีค่าเท่าใด พิจารณาค่า x หรือ y ที่ θ เท่าใด
(แนวตอบ $\cos(-2\pi) = 1$ นั่นคือ พิจารณาค่าของ x ที่ $\theta = -2\pi$)

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 9 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียน
ร่วมกันเฉลยคำตอบ

ข้อสังเกต จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วยจะได้ว่า

$$P(n\pi) = (1, 0) \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่}$$

$$P(n\pi) = (-1, 0) \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่}$$

4. ครูอธิบายการหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}$ และ $\cos \frac{\pi}{4}$

จากรูปที่ 16 ในหนังสือเรียน หน้า 10 จะเห็นว่า จุด $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง AB

เนื่องจาก ส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย

แสดงว่า ส่วนโค้ง AP ยาวเท่ากับส่วนโค้ง PB ซึ่งยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย

จะได้ว่า คอร์ด AP ยาวเท่ากับคอร์ด PB

ดังนั้น

$$AP = PB$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$$

$$x = y$$

$$\text{จาก} \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (\text{สมการวงกลมของวงกลมหนึ่งหน่วย})$$

$$\text{จะได้} \quad 2x^2 = 1$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

เนื่องจาก (x, y) อยู่ในจุดภาคที่ 1 จะได้ว่า $x > 0$ และ $y > 0$

$$\text{ดังนั้น} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{และ} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

นั่นคือ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย คือ จุด $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

$$\text{ทำให้ได้ว่า} \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{และ} \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

และจากรูปที่ 17 ในหนังสือเรียน หน้า 10 สามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของ

จำนวนจริง $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \dots, \frac{(2n+1)\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

และ $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, \dots, -\frac{(2n+1)\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

5. ครูและนักเรียนร่วมกันศึกษาตัวอย่างที่ 3 ในหนังสือเรียน หน้า 11 ซึ่งทำในทำนองเดียวกันกับคำอธิบายก่อนหน้านี้และเปิดโอกาสให้นักเรียนสอบถามในส่วนที่ไม่เข้าใจ

ข้อควรระวัง จากระบบพิกัดฉาก จะได้ว่า

ถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจุดภาคที่ 1 แล้ว $x > 0$ และ $y > 0 \rightarrow (+, +)$

ถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจุดภาคที่ 2 แล้ว $x < 0$ และ $y > 0 \rightarrow (-, +)$

ถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจุดภาคที่ 3 แล้ว $x < 0$ และ $y < 0 \rightarrow (-, -)$

ถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจุดภาคที่ 4 แล้ว $x > 0$ และ $y < 0 \rightarrow (+, -)$

หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 12 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

6. ครูอธิบายรูปที่ 18 ในหนังสือเรียน หน้า 12 ซึ่งทำในทำนองเดียวกันกับการหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}$ และ $\cos \frac{\pi}{4}$ แต่เป็นการหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{6}$ และ $\cos \frac{\pi}{6}$

7. ครูและนักเรียนร่วมกันดูตัวอย่างที่ 4 ในหนังสือเรียน หน้า 13 ซึ่งทำในทำนองเดียวกันกับคำอธิบายก่อนหน้านี้และเปิดโอกาสให้นักเรียนสอบถามในส่วนที่ไม่เข้าใจ

8. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 14 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

9. ครูอธิบายรูปที่ 20 ในหนังสือเรียน หน้า 14 ซึ่งทำในทำนองเดียวกันกับการหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}$ และ $\cos \frac{\pi}{4}$ แต่เป็นการหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}$ และ $\cos \frac{\pi}{3}$

10. ครูและนักเรียนร่วมกันศึกษาตัวอย่างที่ 5 ในหนังสือเรียน หน้า 15 ซึ่งทำในทำนองเดียวกันกับคำอธิบายก่อนหน้านี้และเปิดโอกาสให้นักเรียนสอบถามในส่วนที่ไม่เข้าใจ หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 16 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

11. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 6 ในหนังสือเรียน หน้า 16 ซึ่งแตกต่างจากการหาค่า $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ จากเดิมที่กำหนดค่า θ แล้วให้หาความยาวส่วนโค้ง แต่ในตัวอย่างนี้จะให้ค่าของความยาวส่วนโค้งมาแล้วให้หาค่า θ ที่สอดคล้องกับฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ที่กำหนด

ครูอธิบายว่าจากตัวอย่างที่ 6 ข้อ 1) $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ เมื่อ $-2\pi \leq \theta \leq 0$

จะได้ว่า จุด (x, y) ที่เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีค่า $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

เมื่อ วัดจากจุด $(1, 0)$ จะมีความยาวเป็น $\left|-\frac{\pi}{4}\right|$ และ $\left|-\frac{3\pi}{4}\right|$

ดังนั้น θ ที่สอดคล้องกับ $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ เมื่อ $-2\pi \leq \theta \leq 0$ คือ $-\frac{\pi}{4}$ และ $-\frac{3\pi}{4}$

12. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 6 ข้อ 2) และครูถามคำถาม “จาก $0 \leq \theta \leq 4\pi$

หมายความว่าอะไร”

(**แนวตอบ** หมายความว่า วัดจากจุด $(1, 0)$ ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยเป็นระยะ 4π หน่วย หรือ 2 รอบของวงกลมหนึ่งหน่วย)

จึงทำให้ข้อ 2) มี θ ที่สอดคล้องกับ $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq 4\pi$ คือ $\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$ และ $\frac{23\pi}{6}$

13. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 17 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกัน

เฉลยคำตอบ

ชั่วโมงที่ 3

14. ครูกล่าวว่าจากเดิมที่นักเรียนได้ศึกษาการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ไปแล้ว ในหัวข้อนี้ นักเรียนจะได้ศึกษาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ โดยใช้ความรู้เดิมและการสะท้อน ซึ่งมีแกน x หรือแกน y เป็นเส้นสะท้อน

15. ครูให้นักเรียนพิจารณารูปที่ 22 ในหนังสือเรียน หน้า 17 พิจารณา $\theta > 0$ และ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย ให้จุด $(x, -y)$ เป็นภาพสะท้อนจากจุด (x, y) โดยมีแกน x เป็นเส้นสะท้อน จึงได้ว่าจุด $(x, -y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย

จากจุด $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ และ $(x, -y) = (\cos(-\theta), \sin(-\theta))$

จะได้ว่า $x = \cos\theta, y = \sin\theta$ และ $x = \cos(-\theta), -y = \sin(-\theta)$

จึงสรุปได้ว่า $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

ครูถามคำถาม “ที่จุด (x, y) อยู่ในจุดภาคที่เท่าไรและที่จุด $(x, -y)$ อยู่ในจุดภาคที่เท่าไร”

(**แนวตอบ** ที่จุด (x, y) อยู่ในจุดภาคที่ 1 และที่จุด $(x, -y)$ อยู่ในจุดภาคที่ 4)

ซึ่งถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจุดภาคที่ 1 แล้ว $x > 0$ และ $y > 0 \rightarrow (+, +)$

และถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจุดภาคที่ 4 แล้ว $x > 0$ และ $y < 0 \rightarrow (+, -)$

16. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 7 ในหนังสือเรียน หน้า 18 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ มีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$)

- $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ มีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 18 เมื่อเสร็จแล้วครูและนักเรียน ร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู”

ชั่วโมงที่ 4

17. ครูอธิบายรูปที่ 23 จากรูปที่ 23 กำหนด $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ และจุด $P'(-x, y)$ เป็นจุดปลาย ส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ θ หน่วย

ให้ $\alpha = \pi - \theta$ จะได้ว่า $0 < \alpha < \pi$

เนื่องจาก ส่วนโค้ง AP' ยาว θ หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง $P'B$ ยาว α หน่วย

ให้จุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนจุด $P'(-x, y)$ โดยมีแกน y

เป็นเส้นสะท้อนจากส่วนโค้ง $P'B$ ยาว α หน่วย จะได้ว่า ส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย

จะได้ว่า $x = \cos\alpha$ และ $y = \sin\alpha$

แต่ $-x = \cos\theta = \cos(\pi - \alpha)$ และ $y = \sin\theta = \sin(\pi - \alpha)$

ครูถามคำถาม “จุด $P'(-x, y)$ อยู่ในจุดภาคที่เท่าไร”

(แนวตอบ จุดภาคที่ 2)

จึงสรุปได้ว่า $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ และ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

18. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 8 ในหนังสือเรียน หน้า 19 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง และครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\sin \frac{4\pi}{5}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\sin \frac{4\pi}{5}$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\sin \frac{\pi}{5}$ ในจุดภาคที่ 2 จะมีค่าเท่ากับ 0.59)

- $\cos \frac{4\pi}{5}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\cos \frac{4\pi}{5}$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\sin \frac{\pi}{5}$ ในจุดภาคที่ 2 จะมีค่าเท่ากับ -0.81)

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 19 หลังจากนั้นครูและนักเรียน ร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 19

19. ครูและนักเรียนร่วมกันศึกษารูปที่ 24 ในหนังสือเรียน หน้า 19 และครูอธิบายรูปที่ 24 จากรูปที่ 24

กำหนด $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ และจุด $P''(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วย

ที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ θ หน่วย จะได้ว่า $-x = \cos\theta$ และ $-y = \sin\theta$

ให้ $\alpha = \theta - \pi$ จะได้ $\theta = \pi + \alpha$ เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

เนื่องจาก ส่วนโค้ง AB ยาว π หน่วย จะได้ว่า ส่วนโค้ง BP'' ยาว $\theta - \pi = \alpha$ หน่วย

ให้จุด $P'(-x, y)$ เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนจุด $P''(-x, y)$ โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน

และจุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนจุด $P'(-x, y)$ โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน

จะได้ว่า ส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย

ดังนั้น จุด $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ α หน่วย

จะได้ว่า $x = \cos\alpha$ และ $y = \sin\alpha$

แต่จาก $-x = \cos\theta = \cos(\pi + \alpha)$ และ $-y = \sin\theta = \sin(\pi + \alpha)$

จึงสรุปได้ว่า $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\theta$ และ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\theta$

เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

20. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 9 ในหนังสือเรียน หน้า 20 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง และครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\sin \frac{6\pi}{5}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\sin \frac{6\pi}{5}$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\sin \frac{\pi}{5}$ ในจตุภาคที่ 3 จะมีค่าเท่ากับ -0.59)

- $\cos \frac{6\pi}{5}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\cos \frac{6\pi}{5}$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\sin \frac{\pi}{5}$ ในจตุภาคที่ 3 จะมีค่าเท่ากับ -0.81)

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 20 หลังจากนั้นครูและนักเรียน
ร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 20

ชั่วโมงที่ 5

21. ครูและนักเรียนร่วมกันศึกษารูปที่ 25 ในหนังสือเรียน หน้า 21 และครูอธิบายรูปที่ 25 โดยครูกล่าวว่า
จากรูปที่ 25 กำหนด $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ และจุด $P'(x, -y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจาก
จุด $(1, 0)$ เป็นระยะ θ หน่วย จะได้ว่า $x = \cos\theta$ และ $-y = \sin\theta$

ให้ $\alpha = 2\pi - \theta$ จะได้ว่า $\theta = 2\pi - \alpha$ เมื่อ $0 < \theta < 2\pi$

เนื่องจาก เส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย

จะได้ว่า ส่วนโค้ง $P'A$ ยาว $2\pi - \theta =$

$2\pi - 2\pi + \alpha = \alpha$ หน่วย

ให้จุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนจุด $P'(x, -y)$

โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน จะได้ว่า ส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย

ดังนั้น จุด $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ α หน่วย

จะได้ว่า $x = \cos\alpha$ และ $y = \sin\alpha$

แต่จาก $x = \cos\theta = \cos(2\pi - \alpha)$ และ $-y = \sin\theta = \sin(2\pi - \alpha)$

จึงสรุปได้ว่า $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$ และ $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

22. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 10 ในหนังสือเรียน หน้า 22 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง
และครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\sin \frac{9\pi}{5}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\sin \frac{9\pi}{5}$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\sin \frac{\pi}{5}$ ในจตุภาคที่ 4 จะมีค่าเท่ากับ -0.59)

- $\cos \frac{9\pi}{5}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\cos \frac{9\pi}{5}$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\sin \frac{\pi}{5}$ ในจตุภาคที่ 4 จะมีค่าเท่ากับ 0.81)

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 22 หลังจากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 22

23. ครูให้นักเรียนศึกษากรอบ “คณิตน่ารู้” ในหนังสือเรียน หน้า 22 และครูและนักเรียนร่วมกันศึกษาการหาค่า $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\theta > 2\pi$

จากรูปในหน้า 22 จาก $\theta > 2\pi$ และจุด $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ θ หน่วย

จากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ θ หน่วย

จาก $\theta > 2\pi$ และเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย จะได้ว่า $\theta = 2n\pi + \alpha$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ α เป็นระยะของจุด $P(x, y)$ ที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ θ หน่วย

เมื่อ $0 \leq \alpha < 2\pi$ จะเห็นว่า จุด $P(x, y)$ ที่เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$

เป็นระยะ θ หน่วยและ α หน่วย เป็นจุดเดียวกัน

ขั้นเปรียบเทียบและรวบรวม

24. ครูและนักเรียนจึงร่วมกันอภิปรายว่า ดังนั้น การหาจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ θ หน่วย เมื่อ $\theta > 2\pi$ สามารถหาได้จากจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ α หน่วย เมื่อ $\theta = 2n\pi + \alpha$ และ $0 \leq \alpha < 2\pi$ จึงสรุปได้ว่า

$$\sin (2n\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos (2n\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

25. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 11 ในหนังสือเรียน หน้า 23 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเองและครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\sin \frac{25\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\sin \frac{25\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\sin \frac{\pi}{3}$ ในจตุภาคที่ 1 จะมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$)

- $\sin \left(-\frac{61\pi}{6}\right)$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\sin \left(-\frac{61\pi}{6}\right)$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\sin \frac{\pi}{6}$ ในจตุภาคที่ 1

และ $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ จะได้ว่า $\sin \left(-\frac{61\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$)

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 23 หลังจากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 23

ขั้นสรุป

ขั้นสรุป

ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของ $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ หาได้อย่างไร

(แนวตอบ สามารถหาได้โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย หรือการพิจารณารูปของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์)

- ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ หาได้อย่างไร

(แนวตอบ

- การหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \text{ และ } \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \text{ เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

- การหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \text{ และ } \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \text{ เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

- การหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha \text{ และ } \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha \text{ เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

- การหาค่า $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\theta > 2\pi$

$\theta = 2n\pi + \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $0 \leq \alpha < 2\pi$ จะได้ว่า

$$\sin(2n\pi + \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(2n\pi + \alpha) = \cos\alpha$$

ขั้นนำไปใช้

ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.2 ในหนังสือเรียน หน้า 24 เป็นการบ้าน

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัด กิจกรรมการเรียนรู้ 1) ค่าของฟังก์ชันไซน์ และฟังก์ชันโคไซน์	- ตรวจสอบแบบฝึกทักษะ 1.2 - ตรวจสอบ Exercise 1.2	- แบบฝึกทักษะ 1.2 - Exercise 1.2	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอ ผลงาน	- แบบประเมินการ นำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงาน รายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกต พฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่น ในการทำงาน	- แบบประเมิน คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แหล่งการเรียนรู้

- 1) ห้องสมุด
- 2) แหล่งชุมชน
- 3) อินเทอร์เน็ต

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จำนวน 40 ชั่วโมง

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ

จำนวน 3 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

ผลการเรียนรู้

- 1) เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและ นำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- 2) แก้สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- 3) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) บอกวิธีการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ได้ (K)
- 2) แสดงการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ได้ (P)
- 3) รับผิดชอบต่อน้ำที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

1. ฟังก์ชันแทนเจนต์ (Tangent Function)

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

2. ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (Cotangent Function)

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \text{ เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

3. ฟังก์ชันเซแคนต์ (Secant Function)

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \text{ เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

4. ฟังก์ชันโคเซแคนต์ (Cosecant Function)

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \text{ เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

โดยที่ $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$

และถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 1 แล้ว $x > 0$ และ $y > 0 \rightarrow (+, +)$

ถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 2 แล้ว $x < 0$ และ $y > 0 \rightarrow (-, +)$

ถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 3 แล้ว $x < 0$ และ $y < 0 \rightarrow (-, -)$

ถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 4 แล้ว $x > 0$ และ $y < 0 \rightarrow (+, -)$

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการสำรวจ ค้นหา 2) ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้



แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : นิรนัย (Deductive Method)

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

กำหนดขอบเขตของปัญหา

1. ครูทบทวนความรู้เดิมเกี่ยวกับการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ โดยถามคำถามนักเรียน

ดังนี้

- ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของ $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ หาได้อย่างไร

(แนวตอบ สามารถหาได้โดยการใช้วงกลมหนึ่งหน่วย หรือการพิจารณารูปของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์)

- ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ หาได้อย่างไร

(แนวตอบ

- 1) การหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \text{ และ } \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \text{ เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

- 2) การหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \text{ และ } \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \text{ เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

- 3) การหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha \text{ และ } \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha \text{ เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

- 4) การหาค่า $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\theta > 2\pi$

$$\theta = 2n\pi + \alpha \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก และ } 0 \leq \alpha < 2\pi \text{ จะได้ว่า}$$

$$\sin(2n\pi + \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(2n\pi + \alpha) = \cos\alpha$$

2. ครูกล่าวต่อไปอีกว่านอกจากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์แล้วยังมี ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ซึ่งมีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ มาเชื่อมโยงให้เกิดเป็นความรู้ใหม่ ซึ่งมีบทนิยามดังต่อไปนี้

ขั้นสอน

ขั้นแสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

1. ครูอธิบายบทนิยามในหนังสือเรียน หน้า 25 ดังนี้

- ฟังก์ชันแทนเจนต์ (Tangent Function)

บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

เขียนแทน $\text{tangent}\theta$ ด้วย $\tan\theta$ (อ่านว่า แทนทีตา)

$$\text{ดังนั้น } \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \text{ เมื่อ } \cos\theta \neq 0$$

- ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (Cotangent Function)

บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

เขียนแทน $\text{cotangent}\theta$ ด้วย $\cot\theta$ (อ่านว่า คอตทีตา)

$$\text{ดังนั้น } \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \text{ เมื่อ } \sin\theta \neq 0$$

- ฟังก์ชันเซแคนต์ (Secant Function)

บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

เขียนแทน $\secant\theta$ ด้วย $\sec\theta$ (อ่านว่า เซคทีตา)

$$\text{ดังนั้น } \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \text{ เมื่อ } \cos\theta \neq 0$$

- ฟังก์ชันเซแคนต์ (Cosecant Function)

บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

เขียนแทน $\operatorname{cosecant}\theta$ ด้วย $\operatorname{cosec}\theta$ (อ่านว่า โคเซคทีตา)

$$\text{ดังนั้น } \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \text{ เมื่อ } \sin\theta \neq 0$$

ชั่วโมงที่ 2

2. ครูอธิบายการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ในหนังสือเรียน หน้า 26 แยกพิจารณาจาก 4 กรณีต่อไปนี้

$$\text{กรณี } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

เนื่องจาก $\sin\theta > 0$ และ $\cos\theta > 0$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{ดังนั้น } \tan\theta > 0$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{ดังนั้น } \sec\theta > 0$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad \text{ดังนั้น } \cot\theta > 0$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad \text{ดังนั้น } \operatorname{cosec}\theta > 0$$

สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ ที่ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกค่ามีค่าเป็นจำนวนบวก

3. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 12 ในหนังสือเรียน หน้า 26 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง และครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\tan \frac{\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\tan \frac{\pi}{3}$ หาค่าได้จาก $\frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}}$ จะมีค่าเท่ากับ $\sqrt{3}$)

- $\cot \frac{\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\cot \frac{\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\tan \frac{\pi}{3}$ จะมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$)

- $\sec \frac{\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\sec \frac{\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\cos \frac{\pi}{3}$ จะมีค่าเท่ากับ 2)

- $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{3}$ หาได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\sin \frac{\pi}{3}$ จะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3})$$

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 26 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

4. ครูอธิบายการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ กรณี 2 กรณี $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ในหนังสือเรียน หน้า 27
เนื่องจาก $\sin \theta > 0$ และ $\cos \theta < 0$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ ดังนั้น } \tan \theta < 0$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \text{ ดังนั้น } \sec \theta < 0$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \text{ ดังนั้น } \cot \theta < 0$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \text{ ดังนั้น } \operatorname{cosec} \theta > 0$$

สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ ที่ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคเซแคนต์

จะเป็นจำนวนบวก ส่วนฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ จะเป็นจำนวนลบ

5. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 13 ในหนังสือเรียน หน้า 27 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง และครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\tan \frac{2\pi}{3}$ หาได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\tan \frac{2\pi}{3}$ หาได้จาก $\frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{\cos \frac{2\pi}{3}}$ จะมีค่าเท่ากับ $-\sqrt{3}$)

- $\cot \frac{2\pi}{3}$ หาได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\cot \frac{2\pi}{3}$ หาได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\tan \frac{2\pi}{3}$ จะมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$)

- $\sec \frac{2\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\sec \frac{2\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\cos \frac{2\pi}{3}$ จะมีค่าเท่ากับ -2)

- $\operatorname{cosec} \frac{2\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\operatorname{cosec} \frac{2\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\sin \frac{2\pi}{3}$ จะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3})$$

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 27 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

6. ครูอธิบายการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ กรณี 3 กรณี $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

เนื่องจาก $\sin \theta < 0$ และ $\cos \theta < 0$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ ดังนั้น } \tan \theta > 0$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \text{ ดังนั้น } \sec \theta < 0$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \text{ ดังนั้น } \cot \theta > 0$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \text{ ดังนั้น } \operatorname{cosec} \theta < 0$$

สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ ที่ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ค่าของฟังก์ชันแทนเจนต์และฟังก์ชันโคแทนเจนต์

จะเป็นจำนวนบวก ส่วนฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ จะเป็นจำนวนลบ

7. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 14 ในหนังสือเรียน หน้า 28 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง และครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\tan \frac{4\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\tan \frac{4\pi}{3}$ หาค่าได้จาก $\frac{\sin \frac{4\pi}{3}}{\cos \frac{4\pi}{3}}$ จะมีค่าเท่ากับ $\sqrt{3}$)

- $\cot \frac{4\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\cot \frac{4\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\tan \frac{4\pi}{3}$)

จะมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$)

- $\sec \frac{4\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\sec \frac{4\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\cos \frac{4\pi}{3}$ จะมีค่าเท่ากับ -2)

- $\operatorname{cosec} \frac{4\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\operatorname{cosec} \frac{4\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\sin \frac{4\pi}{3}$

จะมีค่าเท่ากับ $-\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$)

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 28 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

8. ครูอธิบายการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ กรณี 4 กรณี $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

เนื่องจาก $\sin \theta < 0$ และ $\cos \theta > 0$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ ดังนั้น } \tan \theta < 0$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \text{ ดังนั้น } \sec \theta > 0$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \text{ ดังนั้น } \cot \theta < 0$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \text{ ดังนั้น } \operatorname{cosec} \theta < 0$$

สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ ที่ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ค่าของฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันเซแคนต์

จะเป็นจำนวนบวก ส่วนฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ จะเป็นจำนวนลบ

9. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 15 ในหนังสือเรียน หน้า 29 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง และครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\tan \frac{5\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\tan \frac{5\pi}{3}$ หาค่าได้จาก $\frac{\sin \frac{5\pi}{3}}{\cos \frac{5\pi}{3}}$ จะมีค่าเท่ากับ $-\sqrt{3}$)

- $\cot \frac{5\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\cot \frac{5\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\tan \frac{5\pi}{3}$

จะมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$)

- $\sec \frac{5\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\sec \frac{5\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\cos \frac{5\pi}{3}$ จะมีค่าเท่ากับ 2)

- $\operatorname{cosec} \frac{5\pi}{3}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\operatorname{cosec} \frac{5\pi}{3}$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\sin \frac{5\pi}{3}$

จะมีค่าเท่ากับ $-\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$)

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 29 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

10. ครูอธิบายวิธีการดูตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงบางจำนวน

เมื่อ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ว่าให้นักเรียนเริ่มจากฟังก์ชันในของแถวฟังก์ชันแล้วพิจารณาตามหลักและพิจารณาแถวที่เป็นขนาดของ θ ที่นักเรียนต้องการทราบ จุดที่ตัดกันของฟังก์ชันในหลักกับขนาดของ θ ในแถว จะเป็นค่าของฟังก์ชัน

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นใช้ทฤษฎี หลักการ

11. ครูให้นักเรียนจับคู่แล้วร่วมกันทำ “Thinking Time” ในหนังสือเรียน หน้า 30 เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้วครูสุ่มนักเรียน 1 คู่ออกมาเฉลยคำตอบ “Thinking Time” หน้าชั้นเรียน

$$\begin{aligned} \text{(แนวตอบ } \tan(-\theta) &= \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} \\ &= \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} \\ \cot(-\theta) &= \frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} \\ &= \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} \\ \sec(-\theta) &= \frac{1}{\cos(-\theta)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\cos \theta}$$

และ $\operatorname{cosec}(-\theta) = \frac{1}{\sin(-\theta)}$

$$= \frac{1}{-\sin \theta}$$

(จากการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ในหนังสือหน้า 17))

12. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 16 ในหนังสือเรียน หน้า 30 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน และครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ หาค่าได้จาก $\frac{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ จะมีค่าเท่ากับ -1)

- $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

จะมีค่าเท่ากับ -1)

- $\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

จะมีค่าเท่ากับ $\sqrt{2}$)

- $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ หาค่าได้จากการพิจารณาส่วนกลับของ $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4}$

จะมีค่าเท่ากับ $-\sqrt{2}$)

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 31 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

13. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 17 ในหนังสือเรียน หน้า 31 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน และครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\sin\frac{7\pi}{6}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\sin\frac{7\pi}{6}$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\sin\frac{\pi}{6}$ ในจุดภาคที่ 3 จะมีค่าเท่ากับ $-\frac{1}{2}$)

- $\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\cos\frac{\pi}{3}$ ในจุดภาคที่ 1 จะมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$)

- $\tan\frac{13\pi}{4}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\tan\frac{13\pi}{4}$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\tan\frac{\pi}{4}$ ในจุดภาคที่ 3 จะมีค่าเท่ากับ 1)

- $\cot\frac{9\pi}{4}$ หาค่าได้อย่างไร และมีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\cot\frac{9\pi}{4}$ หาค่าได้จากการพิจารณา $\cot\frac{\pi}{4}$ ในจุดภาคที่ 1 จะมีค่าเท่ากับ 1)

- ค่าของ $\sin\frac{7\pi}{6}\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right) + \tan\frac{13\pi}{4}\cot\frac{9\pi}{4}$ มีค่าเท่าใด

(แนวตอบ $\sin\frac{7\pi}{6}\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right) + \tan\frac{13\pi}{4}\cot\frac{9\pi}{4} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + (1)(1) = \frac{3}{4}$)

จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 31 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

14. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน ละครความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วให้แต่ละกลุ่มร่วมกันศึกษาแนวข้อสอบ PAT 1 ในหนังสือเรียน หน้า 32 เมื่อนักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาเสร็จ ครูสุ่มตัวแทนนักเรียนออกมาอธิบายวิธีการดำเนินการตามความเข้าใจของกลุ่มที่หน้าชั้นเรียน

ขั้นสรุป

ขั้นตรวจสอบและสรุป

ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- ในจุดภาคที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติใดมีค่าเป็นจำนวนบวก
(แนวตอบ ฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกค่ามีค่าเป็นจำนวนบวก)
- ในจุดภาคที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติใดมีค่าเป็นจำนวนบวก
(แนวตอบ ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคเซแคนต์จะเป็นจำนวนบวก)
- ในจุดภาคที่ 3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติใดมีค่าเป็นจำนวนบวก
(แนวตอบ ฟังก์ชันแทนเจนต์และฟังก์ชันโคแทนเจนต์จะเป็นจำนวนบวก)
- ในจุดภาคที่ 4 ฟังก์ชันตรีโกณมิติใดมีค่าเป็นจำนวนบวก
(แนวตอบ ฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันเซแคนต์จะเป็นจำนวนบวก)

ขั้นฝึกปฏิบัติ

ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.3 ในหนังสือเรียน หน้า 33 เป็นการบ้าน

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัด กิจกรรมการเรียนรู้ 1) ฟังก์ชันตรีโกณมิติ อื่น ๆ	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 1.3 - ตรวจ Exercise 1.3	- แบบฝึกทักษะ 1.3 - Exercise 1.3	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอ ผลงาน	- แบบประเมินการ นำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงาน รายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกต พฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงาน กลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกต พฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่น ในการทำงาน	- แบบประเมิน คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แหล่งการเรียนรู้

- 1) ห้องสมุด
- 2) แหล่งชุมชน
- 3) อินเทอร์เน็ต

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จำนวน 40 ชั่วโมง

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

จำนวน 3 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

ผลการเรียนรู้

- 1) เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและ นำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- 2) แก่สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- 3) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) บอกวิธีการเปลี่ยนมุมจากหน่วย องศา เป็นเรเดียน และ จากเรเดียน เป็นองศา ได้ (K)
- 2) บอกวิธีการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ (K)
- 3) แสดงวิธีการเปลี่ยนมุมจากหน่วยองศาเป็นเรเดียน และจากเรเดียนเป็นองศา ได้ (P)
- 4) แสดงวิธีการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ (P)
- 5) รับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

- 1) หน่วยการวัดมุมในระบบเรเดียน

360 องศา	เท่ากับ	2π	เรเดียน
จะได้ว่า 180 องศา	เท่ากับ	π	เรเดียน
นั่นคือ 1 องศา	เท่ากับ	$\frac{\pi}{180}$	เรเดียน
และ 1 เรเดียน	เท่ากับ	$\frac{180}{2\pi}$	องศา หรือ $\frac{180}{\pi}$ องศา

- 2) ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

$\cos$ ของจำนวนจริง θ หมายถึง $\cos$ ของมุม θ เรเดียน

$\sin$ ของจำนวนจริง θ หมายถึง $\sin$ ของมุม θ เรเดียน

3) ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\sin \theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}$$

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการสำรวจ ค้นหา 2) ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้



แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching

ชั่วโมงที่ 1

ชั้นนำ

การใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

1. ครูกล่าวว่า จากเรื่องเดิมนักเรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับรูปวงกลมหนึ่งหน่วย โดยมีการวัดระยะจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาและทิศทางตามเข็มนาฬิกาไปแล้วนั้น ในเรื่องนี้ นักเรียนจะได้เรียนรู้การวัดมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม ที่รองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลม ซึ่งสามารถวัดขนาดของมุมที่ต้องการสร้างได้ 2 แบบ คือ การวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาและการวัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

ชั้นสอน

ชั้นรู้ (Knowing)

1. ครูอธิบายรูปที่ 26 ในหนังสือหน้า 34 จะได้ว่าเมื่อวัดมุมในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ขนาดของมุมจะเป็นจำนวนบวกและเมื่อวัดมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ขนาดของมุมจะเป็นจำนวนลบ

หน่วยที่ใช้ในการวัดมุม คือ องศา (degree) เขียนแทนด้วย ($^{\circ}$) ซึ่งแบ่งหน่วยย่อยเป็นลิปดา ($'$) และฟิลิปดา ($''$) ดังนี้

$$1^{\circ} = 60'$$

$$1' = 60''$$

และหน่วยวัดมุมที่สำคัญอีกหน่วยหนึ่ง คือ เรเดียน (radian)

2. ครูให้นักเรียนดูรูปที่ 27 ในหนังสือเรียน หน้า 34 และอธิบาย มุม 1 เรเดียน เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม ที่รองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่มีรัศมียาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้น ซึ่งขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมี r หน่วย ที่ได้จากการหมุนรัศมีไปครบ 1 รอบ มีขนาด 2π เรเดียน แต่เมื่อวัดเป็นหน่วยในระบบองศา จะเท่ากับ 360 องศา

ดังนั้น 360 องศา เท่ากับ 2π เรเดียน

จะได้ว่า 180 องศา เท่ากับ π เรเดียน

นั่นคือ 1 องศา เท่ากับ $\frac{\pi}{180}$ เรเดียน

และ 1 เรเดียน เท่ากับ $\frac{360}{2\pi}$ องศา หรือ $\frac{180}{\pi}$ องศา

ข้อควรระวัง การเขียนขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน จะไม่นิยมเขียนหน่วยกำกับไว้

ชั้นเข้าใจ (Understanding)

3. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 18 ในหนังสือเรียน หน้า 35 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 35 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

ชั่วโมงที่ 2

ชั้นรู้ (Knowing)

4. ครูให้นักเรียนดูรูปที่ 28 ในหนังสือเรียน หน้า 36 และกล่าวว่า เราจะเรียกมุม $\widehat{BAC}$ ว่ามุมที่อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน

5. ครูให้นักเรียนดูรูปที่ 29 ในหนังสือเรียน หน้า 36 จะได้ว่า $\cos$ ของจำนวนจริง θ หมายถึง $\cos$ ของมุม θ เรเดียน $\sin$ ของจำนวนจริง θ หมายถึง $\sin$ ของมุม θ เรเดียน

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

6. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 19 ในหนังสือเรียน หน้า 37 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 37 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

ขั้นรู้ (Knowing)

7. ครูอธิบายว่า ในเรื่องนี้เป็นความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ กับ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

8. ครูให้นักเรียนดูรูปที่ 30 และ 31 ในหนังสือเรียน หน้า 37 และร่วมกันสรุปว่า

$$\sin \theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}$$

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

9. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 20 ในหนังสือเรียน หน้า 39 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 39 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

10. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.4 ในหนังสือเรียน หน้า 40-41 ข้อ 1.-8. เป็นการบ้าน

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นลงมือทำ (Doing)

11. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มเป็น 5 กลุ่มศึกษาตัวอย่างที่ 21 ในหนังสือเรียน หน้า 39 แล้วแลกเปลี่ยน

ความรูู้กันในกลุ่มของตนเอง จากนั้นให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 39 โดยให้กลุ่มที่ 1 หาค่า $\sin A$, กลุ่มที่ 2 หาค่า $\tan A$, กลุ่มที่ 3 หาค่า $\cos A$, กลุ่มที่ 4 หาค่า $\sec A$ และ กลุ่มที่ 5 หาค่า $\operatorname{cosec} A$ เมื่อเสร็จแล้วครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มออกมานำเสนอ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 39 โดยให้นักเรียนที่เป็นตัวแทนอธิบายวิธีการทำโดยละเอียดหน้าชั้นเรียน

12. ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำแบบฝึกทักษะ 1.4 ข้อ 9. ในหนังสือเรียน หน้า 41 เมื่อนักเรียนทุกคนทำเสร็จแล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบโดยละเอียด

ขั้นสรุป

1. ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้1.)หน่วยการวัดมุมในระบบเรเดียน

- 360 องศา เท่ากับกี่เรเดียน
(คำตอบ 2π เรเดียน)
- 180 องศา เท่ากับกี่เรเดียน
(คำตอบ π เรเดียน)
- 1 องศา เท่ากับกี่เรเดียน
(คำตอบ $\frac{\pi}{180}$ เรเดียน)
- 1 เรเดียน เท่ากับกี่องศา
(คำตอบ $\frac{360}{2\pi}$ องศา หรือ $\frac{180}{\pi}$ องศา)

2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

- $\cos$ ของจำนวนจริง θ หมายถึงอะไร
(คำตอบ $\cos$ ของมุม θ เรเดียน)
- $\sin$ ของจำนวนจริง θ หมายถึงอะไร
(คำตอบ $\sin$ ของมุม θ เรเดียน)

3. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

- $\sin \theta$ เป็นความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากด้านใดต่อด้านใด
(คำตอบ $\sin \theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$)
- $\cos \theta$ เป็นความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากด้านใดต่อด้านใด

$$(\text{แนวตอบ } \cos \theta = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}})$$

- $\tan \theta$ เป็นความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากด้านใดต่อด้านใด

$$(\text{แนวตอบ } \tan \theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta})$$

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม	- ตรวจสอบแบบฝึกทักษะ 1.4 - ตรวจสอบ Exercise 1.4 - ตรวจสอบใบงานที่ 1.2	- แบบฝึกทักษะ 1.4 - Exercise 1.4 - ใบงานที่ 1.2	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอผลงาน	- แบบประเมินการนำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัยใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- 3) ใบงานที่ 1.2 เรื่อง การหาค่าของ $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ และ $\operatorname{cosec}\theta$ เมื่อทราบค่าของมุม

แหล่งการเรียนรู้

- 1) ห้องสมุด
- 2) แหล่งชุมชน
- 3) อินเทอร์เน็ต

ใบงานที่ 1.2

เรื่อง การหาค่าของ $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ และ $\operatorname{cosec}\theta$ เมื่อทราบค่าของมุม

คำชี้แจง จงแสดงการหาค่าของ $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ และ $\operatorname{cosec}\theta$ ที่กำหนดไว้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\tan\theta$ เมื่อ $\theta = 180^\circ$

.....

.....

.....

.....

.....

2. $\cot\theta$ เมื่อ $\theta = 300^\circ$

.....

.....

.....

.....

.....

3. $\sec\theta$ เมื่อ $\theta = -210^\circ$

.....

.....

.....

.....

.....

4. $\operatorname{cosec}\theta$ เมื่อ $\theta = -240^\circ$

.....

.....

.....

.....

.....

เรื่อง การหาค่าของ $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ และ $\operatorname{cosec}\theta$ เมื่อทราบค่าของมุม

คำชี้แจง จงแสดงการหาค่าของ $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ และ $\operatorname{cosec}\theta$ ที่กำหนดไว้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\tan\theta$ เมื่อ $\theta = 180^\circ$

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \tan 180^\circ \\ &= \tan(\pi) \\ &= \frac{\sin}{\cos}(\pi) \\ &= \frac{0}{-1} \\ &= 0\end{aligned}$$

2. $\cot\theta$ เมื่อ $\theta = 300^\circ$

$$\begin{aligned}\cot\theta &= \cot 300^\circ \\ &= \cot \frac{5\pi}{3} \\ &= \frac{\cos}{\sin}(\frac{5\pi}{3}) \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

$$3. \sec\theta \text{ เมื่อ } \theta = -210^\circ$$

$$\sec\theta = \sec(-210^\circ)$$

$$= \sec\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$= \sec\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$4. \operatorname{cosec}\theta \text{ เมื่อ } \theta = -240^\circ$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec}(-240^\circ)$$

$$= -\operatorname{cosec}\frac{4\pi}{3}$$

$$= -\frac{1}{\sin\frac{4\pi}{3}}$$

$$= -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จำนวน 40 ชั่วโมง

เรื่อง การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จำนวน 2 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

ผลการเรียนรู้

- 1) เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและ นำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- 2) แก่สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- 3) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) ระบุได้ว่าฟังก์ชันของจำนวนจริงคือขนาดของมุมใดได้ (K)
- 2) เปิดตารางหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ถูกต้อง (K)
- 3) หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้การเทียบบัญญัติไตรยางศ์หรือสัดส่วนได้ (P)
- 4) รับผิดชอบต่อน้ำที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจะช่วยให้การหาค่าหรือตรวจสอบค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร	1. มีวินัย
2. ความสามารถในการคิด	2. ใฝ่เรียนรู้
1) ทักษะการสำรวจ ค้นหา	3. มุ่งมั่นในการทำงาน
2) ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้	

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	

กิจกรรมการเรียนรู้



แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

ขั้นการใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

ครูกระตุ้นความสนใจของนักเรียน โดยให้นักเรียนดูตัวอย่างตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ จากนั้นครูยกตัวอย่างขนาดของมุมที่นักเรียนได้ศึกษามาแล้ว ดังนี้

- มุม 30° จงหาค่า $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$ และ $\tan 30^\circ$

(แนวตอบ $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$)

- มุม 45° จงหาค่า $\sin 45^\circ$, $\cos 45^\circ$ และ $\tan 45^\circ$

(แนวตอบ $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $\tan 45^\circ = 1$)

- มุม 60° จงหาค่า $\sin 60^\circ$, $\cos 60^\circ$ และ $\tan 60^\circ$

(แนวตอบ $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ และ $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$)

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

1. ครูถามคำถามในหนังสือเรียน หน้า 42 ว่า “ถ้าต้องการทราบค่าของ $\sin 43^\circ 30'$ นักเรียนดูจากตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิตินี้ว่าทำได้เท่าใด ” แล้วให้นักเรียนร่วมกันตอบ

(แนวตอบ $\sin 43^\circ 30' = 0.6884$)

2. ครูให้นักเรียนดูตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยให้นักเรียนโทรศัพท์มือถือถือแสกน QR Code “การเปิดตารางหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ให้นักเรียนศึกษาและร่วมกันสังเกตขนาดมุมทางซ้าย และขนาดมุมทางขวามีความสัมพันธ์อย่างไร

(แนวตอบ ขนาดของมุมทางซ้ายบวกขนาดของมุมทางขวาจะเท่ากับ 90° ซึ่งจะบอกได้ว่าตารางนี้

คือ ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ หรือ มุมที่มีขนาดตั้งแต่ 0° ถึง 90°)

3. จากนั้นครูถามคำถามเพื่อให้นักเรียนเชื่อมโยงความรู้จากที่นักเรียนโสดตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ ดังนี้

- $\sin \frac{\pi}{4} 20'$ มีค่าเท่าใด
(แนวตอบ $\sin \frac{\pi}{4} 20' = 0.7112$)
- $\cos \frac{\pi}{6} 10'$ มีค่าเท่าใด
(แนวตอบ $\cos \frac{\pi}{6} 10' = 0.8646$)
- $\tan \frac{\pi}{3} 50'$ มีค่าเท่าใด
(แนวตอบ $\tan \frac{\pi}{3} 50' = 1.0617$)

4. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาเนื้อหาในหนังสือเรียน หน้า 43 และทำร่วมกันทำตัวอย่างที่ 22 ข้อ 1 – 4 โดยใช้ตารางแสดงค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

5. ครูอธิบายวิธีคิดของตัวอย่างที่ 22 ในหนังสือเรียน หน้า 43 ข้อที่ 5) ให้นักเรียนดูว่ามีวิธีการคิดอย่างไร “ข้อ 5. $\sec 0.7738$ ”

(แนวตอบ คิดจากส่วนกลับของ $\sec 0.7738$ นั่นคือ $\sec 0.7738 = \frac{1}{\cos 0.7738}$)

ดังนั้น $\sec 0.7738 = \frac{1}{0.7153} \approx 1.3980$)

6. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่แข่งขันกันหาคำตอบ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 43 คู่ไหนคิดได้ก่อนให้ยกมือขึ้น และออกมาเขียนวิธีทำบนกระดานหน้าชั้นเรียน

ชั่วโมงที่ 2

7. ครูให้นักเรียนเปิดตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติหาค่าของ $\sin 14^\circ 16'$ จากนั้นถามนักเรียนว่า ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติสามารถหาค่าของ $\sin 14^\circ 16'$ ได้หรือไม่

(แนวตอบ นักเรียนจะตอบว่าตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่สามารถหาค่าของ $\sin 14^\circ 16'$ ได้)

หลังจากนั้นครูอธิบายนักเรียนว่า เราสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือของมุมที่ไม่ได้แสดงในตารางจะต้องใช้ความรู้จากการเทียบบัญญัติไตรยางศ์หรือสัดส่วน

8. ครูอธิบายในตัวอย่างที่ 23 ข้อ 1)-3) ในหนังสือเรียน หน้า 44 ให้นักเรียนดูบนกระดานที่ละขั้นตอนอย่างละเอียด พร้อมกับให้นักเรียนเปิดตารางหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติไปพร้อม ๆ กัน

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

9. ครูให้นักเรียนจับคู่ทำแล้วร่วมกันทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 44 และแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเอง เมื่อเสร็จแล้วครูสุ่มนักเรียน 3 คู่ ออกมาแสดงวิธีทำโดยละเอียด

10. ครูให้นักเรียนศึกษากรอบ “ข้อควรระวัง” ในหนังสือเรียน หน้า 45 “ถ้าฟังก์ชันตรีโกณมิติมีค่าของฟังก์ชันลดลง เมื่อขนาดของมุมเพิ่มขึ้น ค่าที่ได้จากการเทียบบัญญัติไตรยางค์หรือสัดส่วนต้องนำไปลบออกจากค่าตั้งต้น” ดังตัวอย่างที่ 24 ในหนังสือเรียน หน้า 45 และให้นักเรียนแต่ละคนศึกษาตัวอย่างที่ 24 ในหนังสือเรียน หน้า 45 ต่อไป

11. หลังจากนั้นครูให้นักเรียนอ่านเพิ่มเติมในกรอบ “คณิตศาสตร์น่ารู้” ในหนังสือเรียน หน้า 45 จากตัวอย่างที่ 24 ข้อ 2) คือ “เนื่องจากค่าของ $\sin \theta$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \pi$ มี 2 ค่า คือ $\sin \theta$ และ $\sin(\pi - \theta)$ ดังนั้น ข้อ 2) จึงได้ θ เท่ากับ 0.4983 และ $\pi - 0.4983$

12. ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 45 เมื่อทำเสร็จแล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ จากนั้นครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.5 ในหนังสือเรียน หน้า 46 เป็นการบ้าน

ขั้นลงมือทำ (Doing)

13. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วทำกิจกรรม ดังนี้

- ให้นักเรียนศึกษามุมเทคโนโลยี ในหนังสือเรียน หน้า 46 เครื่องคิดเลขคำนวณค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแบบฝึกทักษะ 1.5 ข้อ 2)
- เมื่อนักเรียนทุกกลุ่มทำเสร็จแล้วครูสุ่มตัวแทนนักเรียน 4 คน ออกมาแสดงวิธีการใช้เครื่องคิดเลขในการหาค่าฟังก์ชันที่กำหนดในแบบฝึกทักษะ 1.5 ข้อ 2.
- เมื่อนักเรียนนำเสนอเสร็จ ครูให้นักเรียนที่เป็นตัวแทนกลุ่มที่ออกมานำเสนอ เป็นคนคิดโจทย์ให้เพื่อน ๆ ในห้องหาคำตอบ เมื่อเพื่อนหาเสร็จนักเรียนทั้งห้องเฉลยคำตอบร่วมกัน

ขั้นสรุป

ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รอบยอดของนักเรียน ดังนี้

- ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติใช้ประโยชน์อย่างไร

(แนวตอบ ใช้หาค่าฟังก์ชันค่าตรีโกณมิติหรือตรวจสอบคำตอบค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ)

- ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ไม่สามารถเปิดตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติได้จะอย่างไร

(แนวตอบ จะใช้ความรู้จากการเทียบบัญญัติไตรยางศ์ หรือสัดส่วน)

- ถ้าในตารางการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ไม่มีค่า $\cot \theta$, $\sec \theta$ และ $\operatorname{cosec} \theta$ จะหาค่าของฟังก์ชันดังกล่าวได้อย่างไร

(แนวตอบ $\cot \theta$ จะหาได้จากส่วนกลับของ $\tan \theta$, $\sec \theta$ จะหาได้จากส่วนกลับของ $\cos \theta$ และ $\operatorname{cosec} \theta$ จะหาได้จากส่วนกลับของ $\sin \theta$)

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ	- ตรวจสอบแบบฝึกทักษะ 1.5 - ตรวจสอบ Exercise 1.5 - ตรวจสอบใบงานที่ 1.3	- แบบฝึกทักษะ 1.5 - ตรวจสอบ Exercise 1.5 - ใบงานที่ 1.3	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอผลงาน	- แบบประเมินการนำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัยใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- 3) ใบงานที่ 1.3 เรื่อง การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แหล่งการเรียนรู้

- 1) ห้องสมุด
- 2) แหล่งชุมชน
- 3) อินเทอร์เน็ต

ใบงานที่ 1.3

เรื่อง การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

คำชี้แจง จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยใช้ตารางแสดงค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. $\sin 60^\circ =$

2. $\sin 89^\circ 50' =$

3. $\cos 11^\circ 10' =$

4. $\tan 59^\circ 50' =$

5. $\sec 70^\circ 20' =$

6. $\cot 22^\circ 40' =$

7. $\operatorname{cosec} 25^\circ 30' =$

8. $\sin 62^\circ 18'$

.....

.....

.....

.....

9. $\cos 44^\circ 35'$

.....

.....

.....

.....

10. $\tan 78^\circ 42'$

.....

.....

.....

.....

เรื่อง การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

คำชี้แจง จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยใช้ตารางแสดงค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. $\sin 60^\circ = 0.8660$
2. $\sin 89^\circ 50' = 0.0204$
3. $\cos 11^\circ 10' = 0.1937$
4. $\tan 59^\circ 50' = 1.653$
5. $\sec 70^\circ 20' = 2.833$
6. $\cot 22^\circ 40' = 2.394$
7. $\operatorname{cosec} 25^\circ 30' = 2.323$
8. $\sin 62^\circ 18'$

จากตารางจะได้ $\sin 62^\circ 10' = 0.8760$

$$\sin 62^\circ 20' = 0.8774$$

จากค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติข้างต้น จะได้ว่า

ค่าของมุมที่เพิ่มขึ้น $10'$ ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น 0.0014

ค่าของมุมที่เพิ่มขึ้น $8'$ ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น $\frac{0.0014}{10} \times 8 \approx 0.0011$

ดังนั้น $\sin 62^\circ 18' \approx 0.8760 + 0.0011 = 0.8771$ ■

9. $\cos 44^\circ 35'$

จากตารางจะได้ $\cos 44^\circ 30' = 0.7133$

$$\cos 44^\circ 40' = 0.7112$$

จากค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติข้างต้น จะได้ว่า

ค่าของมุมที่เพิ่มขึ้น $10'$ ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น 0.0021

ค่าของมุมที่เพิ่มขึ้น $5'$ ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น $\frac{0.0021}{10} \times 5 \approx 0.0011$

ดังนั้น $\cos 44^\circ 35' \approx 0.7133 + 0.0011 = 0.7144$ ■

10. $\tan 78^\circ 42'$

จากตารางจะได้ $\tan 78^\circ 40' = 4.574$

$$\tan 78^\circ 50' = 4.638$$

จากค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติข้างต้น จะได้ว่า

ค่าของมุมที่เพิ่มขึ้น $10'$ ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น 0.064

ค่าของมุมที่เพิ่มขึ้น $2'$ ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น $\frac{0.064}{10} \times 2 \approx 0.0128$

ดังนั้น $\tan 78^\circ 42' \approx 4.574 + 0.0128 = 4.5868$ ■

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จำนวน 40 ชั่วโมง

เรื่อง กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จำนวน 3 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

ผลการเรียนรู้

- 1) เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและ นำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- 2) แก่สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- 3) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) ระบุพิกัดของวงกลมหนึ่งหน่วยได้ (K)
- 2) บอกค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ (K)
- 3) บอกค่าโดเมน และเรนจ์ของกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ (K)
- 4) หาคาบของกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ (P)
- 5) หาค่าแอมพลิจูดของกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ (P)
- 6) เขียนกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ (P)
- 7) รับผิดชอบต่อน้ำที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a \sin(nx)$$

เมื่อ a และ n เป็นจำนวนจริง ที่ $n > 0$ คาบคือ $\frac{2\pi}{n}$ แอมพลิจูดคือ $|a|$ เรนจ์คือ $[-a, a]$, $a > 0$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a \cos(nx)$$

เมื่อ a และ n เป็นจำนวนจริง ที่ $n > 0$ คาบคือ $\frac{2\pi}{n}$ แอมพลิจูดคือ $|a|$ เรนจ์คือ $[-a, a]$, $a > 0$

กราฟของ $f(x) = \sin(nx)$ และ $f(x) = \cos(nx)$ เมื่อแอมพลิจูดมากขึ้น จุดสูงสุดและจุดต่ำสุดของกราฟก็จะยิ่งต่างกันอย่างมากขึ้น และเมื่อคาบมากขึ้นจุดตัดแกน X ก็ยิ่งเข้าใกล้กันมากขึ้น

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการสำรวจ ค้นหา 2) ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้

 แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

ขั้นการใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

1. ครูกระตุ้นความสนใจของนักเรียน โดยครูและนักเรียนร่วมกันเขียนกราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น และฟังก์ชันกำลังสอง ดังนี้ $y = x + 3$ และ $y = x^2 + x - 6$ โดยครูให้นักเรียนร่วมกันสร้างตารางหาค่า x และ y เพื่อนำไปเขียนกราฟ

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

- ครูให้นักเรียนแต่ละคนเขียนกราฟของ $y = \sin x$ เมื่อ $0 \leq x \leq \pi$ โดยให้นักเรียนเริ่มจากการสร้างตารางหาค่า x และ y จากนั้นครูให้นักเรียนนำค่า x และ y ไปเขียนกราฟ
- เมื่อนักเรียนแต่ละคนเขียนกราฟเสร็จครูยังไม่เฉลยความถูกต้องของกราฟ แต่ครูให้นักเรียนสร้างตาราง

ต่อไปจากเดิม คือเปลี่ยนช่วงของ x จาก $0 \leq x \leq \pi$ เป็น $0 \leq x \leq 2\pi$ จากนั้นครูให้นักเรียนนำค่า x และ y ที่เพิ่มมาไปเขียนกราฟ เมื่อนักเรียนแต่ละคนเขียนกราฟเสร็จครูให้นักเรียนเปลี่ยนกับเพื่อนข้าง ๆ ตรวจสอบความถูกต้อง เมื่อนักเรียนตรวจสอบความถูกต้องและเป็นข้อสรุปความถูกต้องที่เห็นตรงกันแล้ว ครูให้นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้งจากหนังสือเรียน หน้า 48 – 49

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

3. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาทำความเข้าใจเนื้อหาในหนังสือเรียน หน้า 49 และครูอธิบายเน้นย้ำนักเรียนเพิ่มว่า จาก $\sin(2n\pi + \alpha) = \sin \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้กราฟของฟังก์ชันไซน์ ดังกราฟของ $y = \sin x$ เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

- จากกราฟของ $y = \sin x$ จะเห็นว่า กราฟจะแบ่งแกน x ออกเป็นช่วงย่อยที่สั้นที่สุด 2 ช่วง โดยที่ช่วงย่อยแต่ละช่วงมีความยาวเท่ากัน และกราฟในแต่ละช่วงย่อยมีลักษณะเหมือนกัน เรียกความยาวของช่วงย่อยดังกล่าวว่า คาบ (period) และเรียกฟังก์ชันของกราฟว่า ฟังก์ชันที่เป็นคาบ (periodic function)

- จากกราฟช่วง $-2\pi \leq x \leq 0$ คือ 1 คาบ และช่วง $0 \leq x \leq 2\pi$ คือ 1 คาบ สรุปได้ว่าจากกราฟ $y = \sin x$ คือ มีช่วงย่อยที่สั้นที่สุด 4 ช่วง หรือมีความยาวของช่วงย่อย 2 คาบ

- จากกราฟ เป็นกราฟที่มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด ซึ่งจะเรียกค่าที่เท่ากับครึ่งหนึ่งของค่าสูงสุดลบด้วยค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่เป็นคาบว่า แอมพลิจูด (amplitude) ซึ่งจะได้ บทนิยาม ดังต่อไปนี้

บทนิยาม แอมพลิจูดของฟังก์ชันที่เป็นคาบ เท่ากับ $\frac{\text{ค่าสูงสุด} - \text{ค่าต่ำสุด}}{2}$

4. ครูอธิบายว่าจากกราฟของ $y = \sin x$ จะเห็นว่า $-2\pi \leq x \leq 0$ และ $0 \leq x \leq 2\pi$ เป็นช่วงที่มีความยาว 2π เท่ากัน

5. ครูให้นักเรียนศึกษากราฟของ $y = \sin x$ เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ ในหนังสือเรียน หน้า 50 หลังจากนั้นครูถามคำถามเพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน ดังนี้

- เมื่อนักเรียนพิจารณากราฟในช่วง $-2\pi \leq x \leq 0$ จะเห็นว่ากราฟของฟังก์ชันเป็นกราฟเส้นโค้งเปิดลงด้านล่างหรือที่เราเข้าใจว่า กราฟคว่ำ ตั้งแต่ช่วง -2π ถึง $-\pi$ มีค่าต่ำสุด หรือสูงสุดเท่าใด

(แนวตอบ มีค่าสูงสุด เท่ากับ 1)

- กราฟเส้นโค้งเปิดขึ้นด้านบนหรือที่เราเข้าใจว่ากราฟหงาย ตั้งแต่ช่วง $-\pi$ ถึง 0 จะมีค่าต่ำสุด หรือค่าสูงสุดเท่าใด

(แนวตอบ มีค่าต่ำสุด เท่ากับ -1)

- จากฟังก์ชัน $y = \sin x$ มีแอมพลิจูดเท่ากับเท่าใด

(แนวตอบ $\frac{1-(-1)}{2} = 1$)

- โดเมนของฟังก์ชันไซน์ คืออะไร

(แนวตอบ เซตของจำนวนจริง)

- เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ คืออะไร

(แนวตอบ $[-1,1]$)

- กราฟของฟังก์ชันไซน์ตัดแกน X ที่จุด $(x,0)$ เมื่อ x คือเท่าใด

(แนวตอบ $\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$)

- กราฟของฟังก์ชันไซน์ตัดแกน Y ที่จุดใด

(แนวตอบ $(0,0)$)

6. ครูให้นักเรียนศึกษา หัวข้อที่ 2 กราฟของ $y = \cos x$ เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

ในหนังสือเรียน หน้า 50 หลังจากนั้นครูถามคำถามเพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน ดังนี้

- เมื่อนักเรียนพิจารณกราฟในช่วง $-2\pi \leq x \leq 0$ จะเห็นว่ากราฟของฟังก์ชันเป็น

กราฟเส้นโค้งเปิดลงด้านล่างหรือที่เราเข้าใจว่า กราฟคว่ำ ตั้งแต่ช่วง $-\frac{3\pi}{2}$ ถึง $-\frac{\pi}{2}$ มีค่าต่ำสุด หรือสูงสุดเท่าใด

(แนวตอบ มีค่าต่ำสุด เท่ากับ 1)

- กราฟเส้นโค้งเปิดขึ้นด้านบนหรือที่เราเข้าใจว่ากราฟหงาย ตั้งแต่ช่วง $-\frac{\pi}{2}$ ถึง $\frac{\pi}{2}$ จะมีค่าต่ำสุด

หรือค่าสูงสุดเท่าใด

(แนวตอบ มีค่าต่ำสุด เท่ากับ -1)

- จากฟังก์ชัน $y = \cos x$ มีแอมพลิจูดเท่ากับเท่าใด

(แนวตอบ $\frac{1-(-1)}{2} = 1$)

- โดเมนของฟังก์ชันไซน์ คืออะไร

(แนวตอบ เซตของจำนวนจริง)

- เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ คืออะไร

(แนวตอบ $[-1,1]$)

- กราฟของฟังก์ชันไซน์ตัดแกน X ที่จุด $(0, x)$ เมื่อ x คือเท่าใด

(แนวตอบ $\dots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$)

- กราฟของฟังก์ชันไซน์ตัดแกน Y ที่จุดใด

(แนวตอบ $(0,1)$)

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

7. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 25 หลังจากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของกราฟ $y = \sin x$ คือเท่าใด
(แนวตอบ เรนจ์ คือ $[-1, 1]$ คาบคือ 2π และแอมพลิจูด คือ 1)
- เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของกราฟ $y = 2 \sin x$ คือเท่าใด
(แนวตอบ เรนจ์ คือ $[-2, 2]$ คาบคือ 2π และแอมพลิจูด คือ 2)
- เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของกราฟ $y = 3 \sin x$ คือเท่าใด
(แนวตอบ เรนจ์ คือ $[-3, 3]$ คาบคือ 2π และแอมพลิจูด คือ 3)

8. หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 51 เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียน
เฉลยคำตอบลองทำดู

9. จากตัวอย่างที่ 25 และลองทำดู ในหนังสือ เรียน 51 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปการหาแอมพลิจูด
และเรนจ์ของฟังก์ชันในรูปทั่วไป ดังนี้

$$\text{กำหนดให้ } f: R \rightarrow R, f(x) = a \sin x$$

จะได้ว่า แอมพลิจูดของฟังก์ชัน เท่ากับ $|a|$

เรนจ์ของฟังก์ชัน เท่ากับ $[-a, a]$

10. ครูให้นักเรียนเขียนกราฟของ $y = 4 \sin 2x$ และ $y = 8 \sin 6x$ ซึ่งเป็นโจทย์ของตัวอย่างที่ 27-28
ในหนังสือเรียน หน้า 52-53 โดยนักเรียนจะยังไม่เปิดหนังสือเรียน เมื่อนักเรียนเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้
เสร็จครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของกราฟ $y = 4 \sin 2x$ คือเท่าใด
(แนวตอบ เรนจ์ คือ $[-4, 4]$ คาบคือ π และแอมพลิจูด คือ 4)
- เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของกราฟ $y = 8 \sin 6x$ คือเท่าใด
(แนวตอบ เรนจ์ คือ $[-8, 8]$ คาบคือ $\frac{\pi}{3}$ และแอมพลิจูด คือ 8)

11. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 52-53 ทำตัวอย่างที่ 27-28 โดยครูเขียนโจทย์
บนกระดาน เมื่อนักเรียนทำเสร็จครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

12. ครูให้นักเรียนหาความสัมพันธ์ของคาบจากของฟังก์ชันที่นักเรียนได้เขียนกราฟ
โดยครูกำหนด $f: R \rightarrow R, f(x) = a \sin(nx)$ เมื่อ $n > 0$

(แนวตอบ จะได้ว่า คาบของฟังก์ชัน เท่ากับ $\frac{2\pi}{n}$)

13. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปการหาแอมพลิจูด เรนจ์ และคาบของฟังก์ชันไซน์ในรูปทั่วไป ดังนี้
กำหนดให้ $f: R \rightarrow R, f(x) = a \sin(nx)$ เมื่อ $n > 0$

จะได้ว่า แอมพลิจูดของฟังก์ชัน เท่ากับ $|a|$

เรนจ์ของฟังก์ชัน เท่ากับ $[-a, a]$

คาบของฟังก์ชัน เท่ากับ $\frac{2\pi}{n}$

14. ครูกล่าวว่าในทำนองการหาแอมพลิจูด เรนจ์ และคาบของฟังก์ชันโคไซน์ในรูปทั่วไป ก็สามารถหาได้ดังนี้

กำหนดให้ $f: R \rightarrow R, f(x) = a \cos(nx)$ เมื่อ $n > 0$

จะได้ว่า แอมพลิจูดของฟังก์ชัน เท่ากับ $|a|$

เรนจ์ของฟังก์ชัน เท่ากับ $[-a, a]$

คาบของฟังก์ชัน เท่ากับ $\frac{2\pi}{n}$

15. ครูให้นักเรียนแต่ละคนศึกษาตัวอย่างที่ 28 – 29 ในหนังสือเรียน หน้า 53-54 จากนั้นให้นักเรียนทำ
“ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 53-54 เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

16. ครูแนะนำนักเรียนว่าการเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติบางฟังก์ชันอาจต้องใช้ความรู้เรื่อง
การเลื่อนขนาน โดยใช้การเลื่อนขนานกราฟรูปมาตรฐานในแนวแกนนอนหรือแนวแกนตั้ง

17. ครูอธิบายการเขียนกราฟจากตัวอย่างที่ 30 - 31 บนกระดานหน้าชั้นเรียนอย่างละเอียด หลังจากนั้น
ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 55-56 เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลย
คำตอบ

18. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.6 ข้อ 1.-3. เป็นการบ้าน

ชั่วโมงที่ 3

ชั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

1. ครูกล่าวว่าถ้านักเรียนต้องทราบในการเขียนกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ นักเรียนควรทราบโดเมนของ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ดังนี้

- โดเมนของฟังก์ชันแทนเจนต์ คือ $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{I}\}$
- โดเมนของฟังก์ชันเซแคนต์ คือ $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{I}\}$
- โดเมนของฟังก์ชันโคแทนเจนต์ คือ $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbb{I}\}$
- โดเมนของฟังก์ชันโคเซแคนต์ คือ $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbb{I}\}$

2. ครูให้นักเรียนแต่ละคนศึกษากราฟของ $y = \tan x$ ในหนังสือเรียน หน้า 56 หลังจากนั้น
ครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- จากกราฟ $y = \tan x$ ในแต่ละคาบมีค่าต่ำสุด หรือค่าสูงสุด และมีแอมพลิจูดหรือไม่
(แนวตอบ กราฟของ $y = \tan x$ ในแต่ละคาบไม่มีค่าต่ำสุดและค่าสูงสุด

ดังนั้น จึงทำให้ไม่มีแอมพลิจูด)

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

1. ครูอธิบายกราฟ $y = \tan x$ เมื่อพิจารณาเป็นกราฟย่อย ซึ่งแต่ละช่วงย่อยมีความยาวเท่ากับ π
ดังนั้น ฟังก์ชันแทนเจนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ และมีคาบเท่ากับ π

2. ครูให้นักเรียนศึกษากราฟของฟังก์ชันโคเซแคนต์ ฟังก์ชันเซแคนต์ และฟังก์ชันโคแทนเจนต์
ซึ่งทั้ง 3 ฟังก์ชัน เป็นส่วนกลับของฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ และฟังก์ชันแทนเจนต์ หน้า 58-59 เมื่อนักเรียนศึกษา
เสร็จครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- จากกราฟของ $y = \operatorname{cosec} x$ ค่าของฟังก์ชันโคเซแคนต์เป็นจำนวนจริงทุกจำนวน

ยกเว้นค่าใด

(แนวตอบ ค่าระหว่าง -1 กับ 1)

- จากกราฟ $y = \operatorname{cosec} x$ เรนจ์ของฟังก์ชันโคเซแคนต์คือเท่าใด

(แนวตอบ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$)

- ฟังก์ชันโคเซแคนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับเท่าใด

(แนวตอบ 2π)

- จากกราฟฟังก์ชันโคเซแคนต์มีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด และมีแอมพลิจูดหรือไม่

(แนวตอบ กราฟของ $y = \operatorname{cosec} x$ ไม่มีค่าต่ำสุดและค่าสูงสุด ดังนั้น จึงทำให้ไม่มี
แอมพลิจูด)

- จากกราฟของ $y = \sec x$ ค่าของฟังก์ชันโคเซแคนต์เป็นจำนวนจริงทุกจำนวน

ยกเว้นค่าใด

(แนวตอบ ค่าระหว่าง -1 กับ 1)

- จากกราฟ $y = \sec x$ เรนจ์ของฟังก์ชันเซแคนต์คือเท่าใด

(แนวตอบ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$)

- ฟังก์ชันเซแคนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับเท่าใด

(แนวตอบ 2π)

- จากกราฟฟังก์ชันเซแคนต์มีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด และมีแอมพลิจูดหรือไม่

(แนวตอบ กราฟของ $y = \sec x$ ไม่มีค่าต่ำสุดและค่าสูงสุด ดังนั้น จึงทำให้ไม่มีแอมพลิจูด)

3. ครูให้นักเรียนสังเกตกราฟ $y = \cot x$ ซึ่งเป็นส่วนกลับของ กราฟ $y = \tan x$ ทำให้ค่าของฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับ π และกราฟดังกล่าวไม่มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด จึงไม่มีแอมพลิจูด

“ครูถามนักเรียนว่าเพราะเหตุใด กราฟ $y = \cot x$ จึงไม่มีแอมพลิจูด”

(แนวตอบ เนื่องจากแอมพลิจูดจะหาค่าได้กราฟจะต้องมีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด ซึ่งจะมีแค่กราฟ $y = \sin x$ และกราฟ $y = \cos x$ ที่สามารถหาค่าแอมพลิจูดได้)

ชั้นลงมือทำ (Doing)

ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4 คน ละครความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วทำกิจกรรม ดังนี้

- ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำแบบทักษะ 1.6 ในหนังสือเรียน หน้า 60 ข้อ 4.-6.
- เมื่อนักเรียนทุกกลุ่มทำเสร็จแล้วครูสุ่มตัวแทนนักเรียน 11 คน ออกมาแสดงทำโดยละเอียดหน้า

ชั้นเรียน โดยมีครูและเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความถูกต้อง

ขั้นสรุป

ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- โดเมนและเรนจ์ของกราฟ $y = \sin x$ คืออะไร

(แนวตอบ โดเมน คือ เซตของจำนวนจริง และเรนจ์ คือ $[-1,1]$)

- โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน $y = \cos x$ คืออะไร

(แนวตอบ โดเมน คือ เซตของจำนวนจริง และเรนจ์ คือ $[-1,1]$)

- เราจะหาค่าแอมพลิจูดของกราฟได้ กราฟดังกล่าวต้องมีค่าอะไรบ้าง และค่าแอมพลิจูดหาได้จาก

สูตรใด

- (แนวตอบ ค่าสูงสุด และค่าต่ำสุด และหาค่าแอมพลิจูด = $\frac{\text{ค่าสูงสุด} - \text{ค่าต่ำสุด}}{2}$)

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัด กิจกรรมการเรียนรู้ 1) กราฟของฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 1.6 - ตรวจ Exercise 1.6	- แบบฝึกทักษะ 1.6 - Exercise 1.6	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอ ผลงาน	- แบบประเมินการ นำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงาน รายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกต พฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงาน กลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกต พฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่น ในการทำงาน	- แบบประเมิน คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แหล่งการเรียนรู้

- 1) ห้องสมุด
- 2) แหล่งชุมชน
- 3) อินเทอร์เน็ต

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จำนวน 40 ชั่วโมง

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

จำนวน 3 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

ผลการเรียนรู้

- 1) เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและ นำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- 2) แก่สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- 3) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) บอกส่วนประกอบที่สำคัญของวงกลมหนึ่งหน่วยได้ (K)
- 2) ระบุพิกัดของวงกลมหนึ่งหน่วยได้ (K)
- 3) พิสูจน์ที่มาของสูตรฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงและมุมได้ (P)
- 4) หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงและมุมได้ (P)
- 5) รับผิดชอบต่อน้ำที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการสำรวจ ค้นหา 2) ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้



แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

ขั้นการใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

1. ครูกระตุ้นความสนใจของนักเรียน โดยให้นักเรียนดูหน้า 61 จากนั้นครูอธิบายว่าจากหัวข้อที่ผ่านมา ได้ศึกษาการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียวหรือของมุมเพียงมุมเดียวมาแล้ว ในหัวข้อนี้ ให้นักเรียนหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนสองจำนวนและมุมสองมุม

2. ครูถามคำถามเพื่อทบทวนความรู้เดิมในหนังสือเรียน หน้า 61 ดังนี้

- กราฟวงกลมดังกล่าวเราเรียกว่าวงกลมอะไร

(แนวตอบ วงกลมหนึ่งหน่วย)

- ถ้าลากเส้นตรงจากจุด $P(1, 0)$ ไปยังจุด $P_3(x_3, y_3)$ หรือจากจุด $P_1(x_1, y_1)$ ไปยังจุด $P_2(x_2, y_2)$

เราเรียกเส้นตรงนี้ว่าอะไร

(แนวตอบ คอร์ด)

- เนื่องจากจุด (x_1, y_1) เป็นจุดที่อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้น สมการวงกลมที่ผ่านจุด (x_1, y_1)

คืออะไร เพราะเหตุใด

(แนวตอบ $x_1^2 + y_1^2 = 1$ เพราะเป็นสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $(0, 0)$ และรัศมี 1 หน่วย)

3. ครูให้นักเรียนศึกษา พิจารณาค่าของ $\cos(\alpha - \beta)$ เมื่อ α และ β เป็นจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ

ดังรูปหน้า 61

4. ครูอธิบายการพิสูจน์ที่นำมาซึ่งที่มาของสูตร $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ หรือโคไซน์ของผลต่างระหว่างจำนวนจริงสองจำนวนหรือมุมสองมุม

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

1. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาการหาค่าของ $\cos(\alpha - \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$ และ $\sin(\alpha - \beta)$ โดยจะใช้สูตร $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ ซึ่งจะทำให้สรุปได้ว่า

- $\cos(\alpha + \beta)$ หาได้อย่างไร

(แนวตอบ $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$)

- $\sin(\alpha + \beta)$ หาได้อย่างไร

(แนวตอบ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$)

- $\sin(\alpha - \beta)$ หาได้อย่างไร

(แนวตอบ $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$)

2. ครูให้นักเรียนหาค่าของ $\tan(\alpha + \beta)$ และ $\tan(\alpha - \beta)$ เมื่อเราทราบค่าของ $\sin(\alpha + \beta)$ และ $\cos(\alpha + \beta)$

$$(\text{แนวตอบ } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)})$$

$$= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

$$= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}, \text{ เมื่อ } \cos \alpha \neq 0 \text{ และ } \cos \beta \neq 0$$

$$= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\text{สรุปได้ว่า } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\text{ในทำนองเดียวกัน จะได้ } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

1. ครูให้นักเรียนทำ “Thinking Time” ในหนังสือเรียน หน้า 64
2. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ “Thinking Time” ในหนังสือเรียน หน้า 64 ดังนี้

$$(\text{แนวตอบ จาก } \cot(\alpha + \beta) = \frac{1}{\tan(\alpha + \beta)})$$

$$\text{จะได้ } \cot(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}$$

$$= \frac{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta}}{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta}}, \text{ เมื่อ } \sin \alpha \neq 0 \text{ และ } \sin \beta \neq 0$$

$$= \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \beta + \cot \alpha}$$

$$\text{สรุปได้ว่า } \cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \beta + \cot \alpha}$$

$$\text{ในทำนองเดียวกัน } \cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha} \quad \blacksquare)$$

3. ครูให้นักเรียนนำสูตรที่ได้นำมาศึกษาตัวอย่างที่ 32-33 และทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 64-65
เมื่อนักเรียนทำ “ลองทำดู” เสร็จ ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ
4. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 34 และทำ “ลองทำดู” พร้อมกัน
5. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.7 ระดับพื้นฐาน เป็นการบ้าน

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

1. ครูเพิ่มเติมให้สิ่งที่นักเรียนต้องทราบ คือ เราสามารถใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของมุม เมื่อโจทย์หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ รวมทั้งโจทย์ที่ต้องแสดงการพิสูจน์

2. ครูยกตัวอย่าง พร้อมถามคำถาม ดังนี้

- ถ้าต้องการทราบค่า x ของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนด ค่า $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(แนวตอบ จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส หรือสมการวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง $(0, 0)$ รัศมี 1 หน่วย

จะได้ว่า
$$x^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1^2$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ดังนั้น พิกัด คือ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

- ถ้าต้องการทราบค่า y ของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนด ค่า $\cos B = \frac{3}{5}$

(แนวตอบ จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส หรือสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $(0,0)$ และรัศมี 1 หน่วย

จะได้ว่า
$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + y^2 = 1^2$$

$$y^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$y = \frac{4}{5}$$

ดังนั้น พิกัด คือ $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

3. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 35 – 36 ในหนังสือเรียน หน้า 67-68 ต้องใช้ความรู้เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส เข้ามาช่วยในการคิดคำนวณ

4. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 35 -36 ในหนังสือเรียน หน้า 67-68 หลังจากครูอธิบายแล้ว นักเรียนทำ “ลองทำดู” เมื่อนักเรียนทำ “ลองทำดู” เสร็จ ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

5. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 37 ในหนังสือเรียน หน้า 69 ครูอธิบายเพิ่มเติม และให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 70 ไปพร้อม ๆ กัน
6. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 38 – 40 ในหนังสือเรียน หน้า 70 และทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 70 เมื่อนักเรียนทำ “ลองทำดู” เสร็จ ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ
7. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.7 ในหนังสือเรียน หน้า 72 ข้อ 1.-4. เป็นการบ้าน

ชั้นลงมือทำ (Doing)

ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วทำกิจกรรม ดังนี้

- ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำแบบทักษะ 1.7 ในหนังสือเรียน หน้า 60 ข้อ 5.-11.
- เมื่อนักเรียนทุกกลุ่มทำเสร็จแล้วครูสุ่มตัวแทนนักเรียน 18 คน ออกมาแสดงทำโดยละเอียดหน้าชั้นเรียน โดยมีครูและเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความถูกต้อง

ขั้นสรุป

ครูถามคำถามเพื่อประเมินความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- $\cos(\alpha - \beta)$ หาได้อย่างไร
(แนวตอบ $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$)
- $\cos(\alpha + \beta)$ หาได้อย่างไร
(แนวตอบ $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$)
- $\sin(\alpha + \beta)$ หาได้อย่างไร
(แนวตอบ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$)
- $\sin(\alpha - \beta)$ หาได้อย่างไร
(แนวตอบ $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$)
- $\tan(\alpha + \beta)$ หาได้อย่างไร

$$\text{(แนวตอบ } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \text{)}$$

- $\tan(\alpha - \beta)$ หาได้อย่างไร

$$\text{(แนวตอบ } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \text{)}$$

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม	- ตรวจสอบแบบฝึกทักษะ 1.7 - ตรวจสอบ Exercise 1.7	- แบบฝึกทักษะ 1.7 - Exercise 1.7	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอผลงาน	- แบบประเมินการนำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัยใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แหล่งการเรียนรู้

- 1) ห้องสมุด
- 2) แหล่งชุมชน
- 3) อินเทอร์เน็ต

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จำนวน 40 ชั่วโมง

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่า สามเท่า และครึ่งเท่าของจำนวนจริง

จำนวน 3 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

ผลการเรียนรู้

- 1) เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและ นำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- 2) แก้สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- 3) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) คำนวณค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติสองเท่า สามเท่า และครึ่งเท่าของจำนวนจริงหรือมุมได้ (K)
- 2) แก้ปัญหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติสองเท่า สามเท่า และครึ่งเท่าของจำนวนจริงหรือมุมได้ (P)
- 3) มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่า สามเท่า และครึ่งเท่าของจำนวนจริงหรือมุม

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$= 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\sin(3\alpha) = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$$

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

$$\tan(3\alpha) = \frac{3\tan \alpha + \tan^3 \alpha}{1 - 3\tan^2 \alpha}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\cos \alpha + 1}{2}}$$

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการสำรวจ ค้นหา 2) ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้



แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

ขั้นทบทวนความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่

- ครูทบทวนความรู้เดิมเรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกของจำนวนจริงหรือมุม ด้วยการถามคำถามดังนี้

- $\sin(A + B)$ หาได้อย่างไร

(แนวตอบ $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$)

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

- ครูให้เขียน $\sin 2\alpha$ แล้วถามนักเรียนว่าจะหาได้อย่างไร โดยครูยังไม่ให้นักเรียนเปิดหนังสือเรียน
 (แนวตอบ ครูต้องการให้นักเรียนตอบโดยอาศัยความรู้ของเรื่องที่เคยเรียนไปก่อนหน้านี้ นั่นคือ ให้นักเรียนตอบว่าแยก 2α เป็น $\alpha + \alpha$ จะได้ว่า $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha)$)

เมื่อนักเรียนตอบได้เช่นนี้ครูถามนักเรียนต่อไปว่า $\sin(\alpha + \alpha)$ หาได้อย่างไร

(แนวตอบ $\sin(\alpha + \alpha)$ หาได้จากสูตร $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

ซึ่งจะได้ว่า $\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha$

$$= \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

2. ในทำนองเดียวกันครูถามนักเรียนว่า $\cos 2\alpha$ จะหาได้อย่างไร โดยครูยังไม่ให้นักเรียนเปิดหนังสือเรียนเช่นเดิม

(แนวตอบ $\cos 2\alpha$ จะหาได้จาก $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ ซึ่งจะได้ว่า

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha)$$

$$= \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

3. เมื่อนักเรียนหา $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ได้แล้ว $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ครูเขียนลงบนกระดานและกำหนดให้เป็นสมการที่ 1 จากนั้นครูบอกกับนักเรียนว่า $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ เสมอ เพราะเป็นเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ หลังจากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- ถ้านักเรียนแทนค่า $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ ลงในสมการที่ 1 จะได้ $\cos 2\alpha$ เท่ากับเท่าไร

$$(\text{แนวตอบ } \cos 2\alpha = (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \alpha)$$

- ถ้านักเรียนแทนค่า $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ ลงในสมการที่ 1 จะได้ $\cos 2\alpha$ เท่ากับเท่าไร

$$(\text{แนวตอบ } \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 1)$$

4. หลังจากนั้นครูถามนักเรียนต่อไปอีกว่า $\tan 2\alpha$ จะหาได้อย่างไร โดยครูยังไม่ให้นักเรียนเปิดหนังสือเรียนเช่นเดิม

(แนวตอบ $\tan 2\alpha$ จะหาได้จาก $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ ซึ่งจะได้ว่า

$$\tan(2\alpha) = \tan(\alpha + \alpha)$$

$$= \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha}$$

$$= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

5. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 41 ในหนังสือเรียน หน้า 75 เมื่อนักเรียนศึกษาเสร็จครูถามคำถาม

นักเรียน ดังนี้

- ในตัวอย่างที่ 41 $\cos \theta$ เท่ากับเท่าไร

(แนวตอบ $\cos \theta = -\frac{3}{5}$)

- $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ และ $\tan 2\theta$ เท่ากับเท่าไร

(แนวตอบ $\sin 2\theta = -\frac{24}{25}$, $\cos 2\theta = -\frac{7}{25}$ และ $\tan 2\theta = \frac{24}{7}$)

6. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 42 ในหนังสือเรียน หน้า 76 แล้วแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของ

ตนเอง

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

7. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ของตัวอย่างที่ 41 ในหนังสือเรียน หน้า 75 และ “ลองทำดู” ของตัวอย่างที่ 42 ในหนังสือเรียน หน้า 76 เมื่อนักเรียนทุกคนทำเสร็จแล้ว ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

8. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.8 ข้อ 1., ข้อ 4. และข้อ 5.

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

9. ครูถามนักเรียนว่า $\sin 3\alpha$ จะหาได้อย่างไร

(แนวตอบ 3α เป็น $2\alpha + \alpha$ จะได้ว่า $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha)$)

เมื่อนักเรียนตอบได้เช่นนี้ครูถามนักเรียนต่อไปว่า $\sin(2\alpha + \alpha)$ หาได้อย่างไร

(แนวตอบ $\sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha$

$$= \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha$$

$$= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

10. ในทำนองเดียวกันครูถามนักเรียนว่า $\cos 3\alpha$ จะหาได้อย่างไร โดยครูยังไม่ให้นักเรียนเปิดหนังสือเรียนเช่นเดิม

(แนวตอบ $\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha + \alpha)$

$$= \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha$$

$$= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

11. หลังจากนั้นครูถามนักเรียนต่อไปอีกว่า $\tan 3\alpha$ จะหาได้อย่างไร โดยครูยังไม่ให้นักเรียนเปิดหนังสือเรียน เช่นเดิม

$$(\text{แนวตอบ } \tan(3\alpha) = \frac{3\tan \alpha + \tan^3 \alpha}{1 - 3\tan^2 \alpha})$$

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

10. ครูให้นักเรียนจับคู่และร่วมกันศึกษาตัวอย่างที่ 43 และตัวอย่างที่ 44 ในหนังสือเรียน หน้า 78 หลังจากนั้น ครูสุ่มถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- ในตัวอย่างที่ 43 โจทย์ให้อะไรมา

$$(\text{แนวตอบ } \cos 17^\circ = 0.9563)$$

- ในตัวอย่างที่ 43 $\cos 51^\circ$ จะหาได้อย่างไร และมีค่าเท่ากับเท่าไร

$$(\text{แนวตอบ } \cos 51^\circ \text{ จะหาได้จาก } \cos 3(17^\circ) \text{ และ } \cos 51^\circ \approx 0.6293)$$

- ในตัวอย่างที่ 44 โจทย์ให้อะไรมา

$$(\text{แนวตอบ } \tan A = \frac{3}{4} \text{ เมื่อ } 0 < A < \frac{\pi}{2})$$

- ในตัวอย่างที่ 44 $\tan A$ จะหาได้อย่างไร และมีค่าเท่ากับเท่าไร

$$(\text{แนวตอบ } \tan 3A \text{ เมื่อ } 0 < A < \frac{\pi}{2} \text{ จะหาได้จาก } \tan 3A = \frac{3\tan A + \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A})$$

$$\text{และ } \tan 3A = -\frac{117}{44}$$

11. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ของตัวอย่างที่ 43 และ “ลองทำดู” ของตัวอย่างที่ 44 ในหนังสือเรียน หน้า 78 เมื่อนักเรียนทุกคนทำเสร็จแล้ว ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

12. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.8 ข้อ 2. และข้อ 6.

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

13. ครูถามนักเรียนว่า $\cos \frac{\alpha}{2}$ จะหาได้อย่างไร

$$(\text{แนวตอบ } \cos \alpha = \cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right))$$

$$\cos \alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

$$2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos \alpha + 1$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\cos \alpha + 1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\cos \alpha + 1}{2}}$$

14. ในทำนองเดียวกันครุฑถามนักเรียนว่า $\sin \frac{\alpha}{2}$ จะหาได้อย่างไร โดยครูยังไม่ให้นักเรียน
เปิดหนังสือเรียนเช่นเดิม

(แนวตอบ ตอบ $\cos \alpha = \cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$\cos \alpha = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \cos \alpha$$

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

15. ครูให้นักเรียนจับคู่และร่วมกันศึกษาตัวอย่างที่ 45 ในหนังสือเรียน หน้า 79 หลังจากนั้น ครูสุ่มถาม
คำถามนักเรียน ดังนี้

- $\sin 15^\circ$ จะหาได้อย่างไร

(แนวตอบ $\sin 15^\circ$ จะหาได้จาก $\sin \frac{30^\circ}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}}$)

- $\sin 15^\circ$ เท่ากับเท่าไร

(แนวตอบ $\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$)

16. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 80 เมื่อทำเสร็จแล้วครูและนักเรียนร่วมกัน
เฉลยคำตอบ หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.8 ข้อ 3) เป็นการบ้าน

ขั้นลงมือทำ (Doing)

17. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน ละครความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วให้ทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ดังนี้

- ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.8 ข้อ 7. - ข้อ 10.
- ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจร่วมกัน หลังจากนั้นครูลุ่มนักเรียนในแต่ละกลุ่มออกมาเฉลยคำตอบ อย่างละเอียด

ขั้นสรุป

ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รอบยอดของนักเรียน ดังนี้

- $\sin(2\alpha)$ หาได้อย่างไร
(แนวตอบ $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$)
- $\cos 2\alpha$ จะหาได้อย่างไร
(แนวตอบ $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
 $= 1 - 2 \sin^2 \alpha$
 $= 2 \cos^2 \alpha - 1$)
- $\tan 2\alpha$ จะหาได้อย่างไร
(แนวตอบ $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$)
- $\sin(3\alpha)$ หาได้อย่างไร
(แนวตอบ $\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$)
- $\cos 3\alpha$ จะหาได้อย่างไร
(แนวตอบ $\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$)
- $\tan 3\alpha$ จะหาได้อย่างไร
(แนวตอบ $\tan(3\alpha) = \frac{3 \tan \alpha + \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$)
- $\sin \frac{\alpha}{2}$ จะหาได้อย่างไร
(แนวตอบ $\sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$)
- $\cos \frac{\alpha}{2}$ จะหาได้อย่างไร

$$(\text{แนวตอบ } \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\cos \alpha + 1}{2}})$$

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่า สามเท่า และครึ่งเท่าของจำนวนจริง	- ตรวจแบบฝึกทักษะ 1.8 - ตรวจ Exercise 1.8	- แบบฝึกทักษะ 1.8 - Exercise 1.8	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอผลงาน	- แบบประเมินการนำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แหล่งการเรียนรู้

- 1) ห้องสมุด
- 2) แหล่งชุมชน
- 3) อินเทอร์เน็ต

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จำนวน 40 ชั่วโมง

เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จำนวน 3 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

ผลการเรียนรู้

- 1) เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและ นำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- 2) แก้สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- 3) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) หาความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ (K)
- 2) ใช้ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้แก้ปัญหาได้ (P)
- 3) มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่า สามเท่า และครึ่งเท่าของจำนวนจริงหรือมุม

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos \alpha \cos \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = -2\cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = -2\sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร 2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการสำรวจ ค้นหา 2) ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	1. มีวินัย 2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้



แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : Concept Based Teaching

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

ขั้นทบทวนความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่

ครูทบทวนความรู้เดิมเรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกของจำนวนจริงหรือมุม ด้วยการถามคำถาม

ดังนี้

- $\sin(A + B)$ หาได้อย่างไร
(แนวตอบ $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$)
- $\sin(A - B)$ หาได้อย่างไร
(แนวตอบ $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$)
- $\cos(\alpha - \beta)$ หาได้อย่างไร
(แนวตอบ $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$)
- $\cos(\alpha + \beta)$ หาได้อย่างไร
(แนวตอบ $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$)

ชั้นสอน

ชั้นรู้ (Knowing)

1. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน ละครความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียน หน้า 81 ดังนี้

- ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันตอบคำถามในกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียน หน้า 81
- ให้นักเรียนในกลุ่มแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อนสมาชิกในกลุ่มจนเป็นที่เข้าใจร่วมกัน
- ครูสุ่มนักเรียนออกมาตอบคำถามของกิจกรรมคณิตศาสตร์ โดยมีครูและเพื่อน ๆ

คอยตรวจสอบความถูกต้อง

ชั้นเข้าใจ (Understanding)

1. จากการทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ในหนังสือเรียน หน้า 81 ครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\sin(\alpha + \beta)$ หาได้อย่างไร
(แนวตอบ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$)
- $\sin(\alpha - \beta)$ หาได้อย่างไร
(แนวตอบ $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$)
- $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$ เท่ากับเท่าไร
(แนวตอบ $2\sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$)
- $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$ เท่ากับเท่าไร
(แนวตอบ $2\cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$)

ชั่วโมงที่ 2

ชั้นสอน

ชั้นเข้าใจ (Understanding)

2. ครูให้นักเรียนกลุ่มเดิมหาค่าของ $2\cos \alpha \cos \beta$ และ $2\sin \alpha \sin \beta$ โดยให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มร่วมกันแลกเปลี่ยนความรู้จนเป็นที่เข้าใจร่วมกัน จากนั้นครูสุ่มนักเรียนให้มานำเสนอคำตอบ แต่ในการนำเสนอนี้ ครูจะยังไม่บอกคำตอบที่ถูกต้องให้นักเรียนทราบ แต่ครูจะถามคำถามกับนักเรียน ดังนี้

- $\cos(\alpha - \beta)$ หาได้อย่างไร
(แนวตอบ $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$)

- $\cos(\alpha + \beta)$ หาได้อย่างไร

(แนวตอบ $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$)

- $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$ เท่ากับเท่าไร

(แนวตอบ $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos \alpha \cos \beta$)

- $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$ เท่ากับเท่าไร

(แนวตอบ $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = -2\cos \alpha \sin \beta$)

3. จากนั้นครูเขียนความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ อีก ดังนี้

โดยครูกำหนด $x + y = \alpha$ (1)

$x - y = \beta$ (2)

และถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- คำตอบของระบบสมการข้างต้น เท่ากับเท่าไร

(แนวตอบ $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ และ $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$)

- หาคำตอบของระบบสมการมาได้อย่างไร

(แนวตอบ นักเรียนสามารถตอบได้หลากหลายขึ้นกับความถนัดในการแก้ระบบสมการ

ของนักเรียน โดยนักเรียนอาจตอบว่า ใช้สมบัติการเท่ากันและแก้สมการหาค่า x แล้วนำค่า x ที่ได้ไปแทนค่าเพื่อหาค่า y ต่อไป)

เมื่อนักเรียนตอบคำถามได้เช่นนี้ ครูเขียนความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ อีก ดังนี้

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2\sin x \cos y$$

และครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- แทนค่า x และ y ในความสัมพันธ์ข้างต้นจะได้ผลลัพธ์เป็นอย่างไร

(แนวตอบ $\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$)

ซึ่งจะได้ว่า $\sin \alpha + \sin \beta = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

- ถ้าแทนค่า x และ y ในความสัมพันธ์ $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$ จะได้ผลลัพธ์

เป็นอย่างไร

(แนวตอบ $\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$)

ซึ่งจะได้ว่า $\sin \alpha - \sin \beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

- ถ้าแทนค่า x และ y ในความสัมพันธ์ $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$ จะได้ผลลัพธ์

เป็นอย่างไร

$$\begin{aligned} & (\text{แทนค่า } \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \\ & 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{ซึ่งจะได้ว่า } \cos \alpha + \cos \beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

- ถ้าแทนค่า x และ y ในความสัมพันธ์ $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$

จะได้ผลลัพธ์เป็นอย่างไร

$$\begin{aligned} & (\text{แทนค่า } \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \\ & -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{ซึ่งจะได้ว่า } \sin \alpha - \sin \beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นสอน

ขั้นรู้ (Knowing)

4. ครูให้นักเรียนจับคู่และร่วมกันศึกษาตัวอย่างที่ 46-48 ในหนังสือเรียน หน้า 83-84 จากนั้นแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเองจนเป็นที่เข้าใจร่วมกัน จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $2 \cos 55^\circ \cos 5^\circ$ หาได้อย่างไร

$$(\text{แทนค่า } 2 \cos 55^\circ \cos 5^\circ = \cos(55^\circ + 5^\circ) + \cos(55^\circ - 5^\circ))$$

$$\text{ซึ่งจะได้ว่า } 2 \cos 55^\circ \cos 5^\circ = \cos 60^\circ + \cos 50^\circ$$

- $\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \theta\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \theta\right)$ เท่ากับเท่าไร

(แทนค่า

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \theta\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \theta\right) = 2 \sin\left[\frac{\left(\frac{5\pi}{6} - \theta\right) + \left(\frac{5\pi}{6} + \theta\right)}{2}\right] \cos\left[\frac{\left(\frac{5\pi}{6} - \theta\right) - \left(\frac{5\pi}{6} + \theta\right)}{2}\right]$$

$$\text{ซึ่งจะได้ว่า } \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \theta\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \theta\right) = 2 \sin \frac{5\pi}{6} \cos(-\theta) = \cos \theta$$

- $\sin 40^\circ + \cos 10^\circ$ หาได้อย่างไร

$$(\text{แนวตอบ } \sin 40^\circ + \cos 10^\circ = \sin 40^\circ + \sin 80^\circ =$$

$$2 \sin \frac{40^\circ+80^\circ}{2} \cos \frac{40^\circ-80^\circ}{2}$$

$$\text{ซึ่งจะได้ว่า } \sin 40^\circ + \cos 10^\circ = 2 \sin 60^\circ \cos(-20^\circ))$$

5. จากตัวอย่างที่ 48 ในหนังสือเรียน หน้า 84 ครูอธิบายกรอบ “แนะแนวคิด” ให้นักเรียนฟังว่า $\cos 10^\circ = \sin 80^\circ$ และ $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$ นั้นเป็น co-function ตรีโกณมิติ และ $\cos(-\theta) = \cos \theta$ นั้นมาจากบทพิสูจน์ในหนังสือ หน้า 17

ขั้นเข้าใจ (Understanding)

6. จากนั้นครูให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ท้ายตัวอย่างที่ 46-48 ในหนังสือเรียน หน้า 83-84 เมื่อทำเสร็จแล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

7. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.9 ข้อ 1.-6. ในหนังสือเรียน หน้า 85 เป็นการบ้าน

ขั้นลงมือทำ (Doing)

8. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วให้ทำกิจกรรม คณิตศาสตร์ ดังนี้

- ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.9 ข้อ 7. และข้อ 8. ในหนังสือเรียน หน้า 85
- ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจร่วมกัน หลังจากนั้นครูลุ่มนักเรียนในแต่ละกลุ่มออกมา

เฉลยคำตอบ อย่างละเอียด โดยครูและเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความถูกต้อง

ขั้นสรุป

ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รอบยอดของนักเรียน ดังนี้

- ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติมีอะไรบ้าง

$$(\text{แนวตอบ } \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos \alpha \cos \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = -2\cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2\sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2\cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2\cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = -2\sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 1) ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	- ตรวจสอบแบบฝึกทักษะ 1.9 - ตรวจสอบ Exercise 1.9	- แบบฝึกทักษะ 1.9 - Exercise 1.9	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอผลงาน	- แบบประเมินการนำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะอันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน	- แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แหล่งการเรียนรู้

- 1) ห้องสมุด
- 2) แหล่งชุมชน
- 3) อินเทอร์เน็ต

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จำนวน 40 ชั่วโมง

เรื่อง ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จำนวน 4 ชั่วโมง

ผู้สอน นางสาวภัทรพร ตลเจือ

โรงเรียนสตรีศึกษา

ผลการเรียนรู้

- เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและ นำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- แก้สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

- คำนวณหาตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้ (K)
- เขียนขั้นตอนแสดงวิธีการหาตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ พร้อมให้เหตุผลประกอบ

ได้อย่างสมเหตุสมผล (P)

- รับผิดชอบต่อน้ำที่ที่ได้รับมอบหมาย (A)

สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

ฟังก์ชัน arcsine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \sin y$ และ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

ฟังก์ชัน arccosine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \cos y$ และ $0 \leq y \leq \pi$

ฟังก์ชัน arctangent คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \tan y$ และ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียนและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
1. ความสามารถในการสื่อสาร	1. มีวินัย

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	คุณลักษณะอันพึงประสงค์
2. ความสามารถในการคิด 1) ทักษะการสำรวจ ค้นหา 2) ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ 3. ความสามารถในการแก้ปัญหา	2. ใฝ่เรียนรู้ 3. มุ่งมั่นในการทำงาน

กิจกรรมการเรียนรู้



แนวคิด/รูปแบบการสอน/วิธีการสอน/เทคนิค : นิรนัย (Deductive Method)

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นนำ

ขั้นกำหนดขอบเขตของปัญหา

- ครูทบทวนความรู้เดิมเรื่องฟังก์ชันผกผัน โดยการถามคำถามนักเรียน ดังนี้
 - ตามความเข้าใจของนักเรียนฟังก์ชันผกผันเป็นอย่างไร
(แนวตอบ นักเรียนสามารถตอบหลากหลายขึ้นอยู่กับความเข้าใจของนักเรียน)
- ครูถามคำถามเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน ดังนี้
 - ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ หาได้หรือไม่
(แนวตอบ นักเรียนตอบได้หลากหลาย เพราะเป็นเพียงคำถามจุดประเด็นให้นักเรียนสนใจ)

ขั้นสอน

ขั้นแสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

- ครูอธิบายกับนักเรียนว่าการหาตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติทำได้โดยการสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของฟังก์ชัน แต่เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และตัวผกผันของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งเท่านั้นที่เป็นฟังก์ชัน ดังนั้น ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติจึงไม่เป็นฟังก์ชัน จากนั้นครูถามคำถามกระตุ้นให้นักเรียนคิดต่อว่าจะทำอย่างไรให้ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชัน

(แนวตอบ กำหนดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติ)

2. ครูเขียนกราฟของ $y = \sin x$ บนกระดานหน้าชั้นเรียน จากนั้นครูอธิบายบทนิยามของฟังก์ชัน arcsine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \sin y$ และ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ และครูอธิบายความรู้ในกรอบ “คณิตน่ารู้” ให้นักเรียนฟังว่า “ $y = \arcsin x$ จะเขียนสั้นๆ ว่า $y = \arcsin x$ ”

3. หลังจากนั้นครูเขียนกราฟของ $y = \arcsin x$ ให้นักเรียนดูอย่างละเอียดบนกระดานหน้าชั้นเรียนบนแกนของกราฟ $y = \sin x$ และให้นักเรียนสังเกตว่า โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน arcsine คืออะไร จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- โดเมนของฟังก์ชัน arcsine คืออะไร
(แนวตอบ โดเมนของฟังก์ชัน arcsine คือ $[-1, 1]$)
- เรนจ์ของฟังก์ชัน arcsine คืออะไร
(แนวตอบ เรนจ์ของฟังก์ชัน arcsine คือ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$)

ขั้นใช้ทฤษฎี หลักการ

4. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 49 ในหนังสือเรียน หน้า 87-88 หลังจากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- sin อะไรที่มีมุมอยู่ระหว่าง $-\frac{\pi}{2}$ ถึง $\frac{\pi}{2}$ แล้วมีค่า $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(แนวตอบ $\sin \frac{\pi}{4}$)
- ดังนั้น $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ เท่ากับเท่าไร
(แนวตอบ $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$)
- sin อะไรที่มีมุมอยู่ระหว่าง $-\frac{\pi}{2}$ ถึง $\frac{\pi}{2}$ แล้วมีค่า $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
(แนวตอบ $\sin \left(-\frac{\pi}{3}\right)$)
- ดังนั้น $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ เท่ากับเท่าไร
(แนวตอบ $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$)

5. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 88 เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้ว ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

ชั้นแสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

6. ครูเขียนกราฟของ $y = \cos x$ บนกระดานหน้าชั้นเรียน จากนั้นครูอธิบายบทนิยามของฟังก์ชัน arccosine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \cos y$ และ $0 \leq y \leq \pi$ จากนั้นครูอธิบายความรู้ในกรอบ “คณิตน่ารู้” ให้นักเรียนฟังว่า “ $y = \arccosine x$ จะเขียนสั้นๆ ว่า $y = \arccos x$ ”

7. หลังจากนั้นครูเขียนกราฟของ $y = \arccos x$ ให้นักเรียนดูอย่างละเอียดบนกระดานหน้าชั้นเรียนบนแกนของกราฟ $y = \cos x$ และให้นักเรียนสังเกตว่า โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน arccosine คืออะไร จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- โดเมนของฟังก์ชัน $\arccos$ คืออะไร
(แนวตอบ โดเมนของฟังก์ชัน $\arccos$ คือ $[-1, 1]$)
- เรนจ์ของฟังก์ชัน arccosine คืออะไร
(แนวตอบ เรนจ์ของฟังก์ชัน arccosine คือ $[0, \pi]$)

ชั้นใช้ทฤษฎี หลักการ

8. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 50 ในหนังสือเรียน หน้า 88-89 หลังจากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\cos$ อะไรที่มีมุมอยู่ระหว่าง 0 ถึง π แล้วมีค่า 1
(แนวตอบ $\cos 0$)
- ดังนั้น $\arccos 1$ เท่ากับเท่าไร
(แนวตอบ $\arccos 1 = 0$)
- $\cos$ อะไรที่มีมุมอยู่ระหว่าง 0 ถึง π แล้วมีค่า $-\frac{1}{2}$
(แนวตอบ $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$)
- ดังนั้น $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ เท่ากับเท่าไร
(แนวตอบ $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$)

9. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 90 เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้ว ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

ชั้นสอน

ชั้นแสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

10. ครูเขียนกราฟของ $y = \tan x$ บนกระดานหน้าชั้นเรียน จากนั้นครูอธิบายบทนิยามของฟังก์ชัน arctangent คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \tan y$ และ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ จากนั้นครูอธิบายความรู้ในกรอบ “คณิตน่ารู้” ให้นักเรียนฟังว่า “ $y = \arctangent x$ จะเขียนสั้นๆ ว่า $y = \arctan x$ ”
11. หลังจากนั้นครูเขียนกราฟของ $y = \arctan x$ ให้นักเรียนดูอย่างละเอียดบนกระดานหน้าชั้นเรียน บนแกนของกราฟ $y = \tan x$ และให้นักเรียนสังเกตว่า โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน arctangent คืออะไร จากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- โดเมนของฟังก์ชัน arctangent คืออะไร
(แนวตอบ โดเมนของฟังก์ชัน arctangent คือ $(-\infty, \infty)$)
- เรนจ์ของฟังก์ชัน arctangent คืออะไร
(แนวตอบ เรนจ์ของฟังก์ชัน arctangent คือ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$)

ชั้นใช้ทฤษฎี หลักการ

12. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 51 ในหนังสือเรียน หน้า 91 หลังจากนั้นครูถามคำถามนักเรียน ดังนี้

- $\tan$ มุมเท่าไรมีค่า $\frac{\sqrt{3}}{3}$
(แนวตอบ $\tan \frac{\pi}{6}$)
- ดังนั้น $\arctan \frac{\sqrt{3}}{3}$ เท่ากับเท่าไร
(แนวตอบ $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$)
- $\tan$ มุมเท่าไรมีค่า -1
(แนวตอบ $\tan(-\frac{\pi}{4})$)
- ดังนั้น $\arctan(-1)$ เท่ากับเท่าไร

(แนวตอบ $\arccos(-1) = -\frac{\pi}{4}$)

13. ครูให้นักเรียนทำ “ลองทำดู” ในหนังสือเรียน หน้า 92 เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้ว ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

ชั่วโมงที่ 4

ขั้นสอน

ขั้นแสดงและอธิบายทฤษฎี หลักการ

14. ครูให้นักเรียนศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างโดเมนและเรนจ์ที่ทำให้แต่ละฟังก์ชันมีฟังก์ชันผกผันได้ในหนังสือเรียน หน้า 92 และศึกษากราฟของฟังก์ชัน sine, cosine, tangent และกราฟของฟังก์ชัน arcsine, arccosine และ arctangent ในหนังสือเรียน หน้า 92-93

ขั้นใช้ทฤษฎี หลักการ

15. ครูให้นักเรียนจับคู่และร่วมกันศึกษาตัวอย่างที่ 52-56 ในหนังสือเรียน หน้า 93-95 เมื่อนักเรียนแลกเปลี่ยนความรู้กับคู่ของตนเองจนเป็นที่เข้าใจร่วมกันแล้วครูสุ่มนักเรียน 4 คน ออกมาแสดงตัวอย่างละเอียดพร้อมกับถามคำถามนักเรียนในห้องให้ร่วมกันตรวจสอบพร้อมแสดงแนวคิดที่ต่างหรือวิธีการที่หลากหลาย

16. ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำ “ลองทำดู” ท้ายตัวอย่างที่ 52-56 ในหนังสือเรียน หน้า 93-96 เมื่อนักเรียนแต่ละคนทำเสร็จ ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบโดยละเอียด

ขั้นสรุป

ขั้นตรวจสอบและสรุป

17. ครูถามคำถามเพื่อสรุปความรู้รวบยอดของนักเรียน ดังนี้

- ฟังก์ชัน arcsine คืออะไร

(แนวตอบ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \sin y$ และ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$)

- โดเมนของฟังก์ชัน arcsine คืออะไร

(แนวตอบ โดเมนของฟังก์ชัน arcsine คือ $[-1, 1]$)

- เรนจ์ของฟังก์ชัน arcsine คืออะไร

(แนวตอบ เรนจ์ของฟังก์ชัน arcsine คือ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$)

- ฟังก์ชัน arccosine คืออะไร

(แนวตอบ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \cos y$ และ $0 \leq y \leq \pi$)

- โดเมนของฟังก์ชัน arccos คืออะไร

(แนวตอบ โดเมนของฟังก์ชัน arccos คือ $[-1, 1]$)

- เรนจ์ของฟังก์ชัน arccosine คืออะไร

(แนวตอบ เรนจ์ของฟังก์ชัน arccosine คือ $[0, \pi]$)

- ฟังก์ชัน arctangent คืออะไร

(แนวตอบ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \tan y$ และ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$)

- โดเมนของฟังก์ชัน arctangent คืออะไร

(แนวตอบ โดเมนของฟังก์ชัน arctangent คือ $(-\infty, \infty)$)

- เรนจ์ของฟังก์ชัน arctangent คืออะไร

(แนวตอบ เรนจ์ของฟังก์ชัน arctangent คือ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$)

ชั้นฝึกปฏิบัติ

18. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน คละความสามารถทางคณิตศาสตร์ แล้วให้ทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ ดังนี้

- ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ 1.10 ในหนังสือเรียน หน้า 96
- ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจร่วมกัน หลังจากนั้นครูลุ่มนักเรียนในแต่ละกลุ่ม

ออกมาเฉลยคำตอบ อย่างละเอียด โดยครูและเพื่อน ๆ คอยตรวจสอบความถูกต้อง

การวัดและประเมินผล

รายการวัด	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
ประเมินระหว่างการจัด กิจกรรมการเรียนรู้ 1) ตัวผกผันของฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ	- ตรวจสอบแบบฝึกทักษะ 1.10 - ตรวจสอบ Exercise 1.10	- แบบฝึกทักษะ 1.10 - Exercise 1.10	- ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์ - ร้อยละ 60 ผ่านเกณฑ์
2) การนำเสนอผลงาน	- ประเมินการนำเสนอ ผลงาน	- แบบประเมินการ นำเสนอผลงาน	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
3) พฤติกรรมการทำงาน รายบุคคล	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานรายบุคคล	- แบบสังเกต พฤติกรรม การทำงาน รายบุคคล	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
4) พฤติกรรมการทำงาน กลุ่ม	- สังเกตพฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- แบบสังเกต พฤติกรรม การทำงานกลุ่ม	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์
5) คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- สังเกตความมีวินัย ใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่น ในการทำงาน	- แบบประเมิน คุณลักษณะ อันพึงประสงค์	- ระดับคุณภาพ 2 ผ่านเกณฑ์

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

- 1) หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- 2) หนังสือแบบฝึกหัดรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แหล่งการเรียนรู้

- 1) ห้องสมุด
- 2) แหล่งชุมชน
- 3) อินเทอร์เน็ต